

# 磁场对导电球壳的转动的影响

王艺霖<sup>1</sup>, 秦子衡<sup>2</sup>

(北京大学物理学院, 北京 100871)

**摘要:** 研究了由细线悬挂的导电球壳绕悬线的转动受磁场的影响。通过求解体系的电磁场方程, 给出了轴对称磁场对球壳的力和力矩, 发现磁场轴平行于转轴时磁场对球壳运动无影响, 磁场轴垂直于转轴时起线性阻尼作用, 并计算了阻尼衰减时间常数。综合其他作用, 写出了磁场存在时球壳的运动方程, 并给出了解析解。介绍了实验装置和测量方法。在磁场平行和垂直于转轴时, 改变磁场分布 (磁铁表面与球壳中心距离), 测量球壳的转角, 拟合转角-时间函数 (符合指数衰减规律), 求出不同条件下的衰减系数, 定性地证实了理论分析。为了定量检验理论和实验的一致性, 估计了柱形磁铁的磁场分布形式, 测量了磁铁轴线上的磁场分布, 用数值方法计算出不同距离下的衰减系数, 发现与实验结果定量符合。理论和实验结果定量的符合, 说明实验测量和理论分析都达到了很精准的水平。

**关键词:** 导电球壳; 磁场; 转动; 阻尼振荡; IYPT2023 年第 2 题

## Effect of the magnetic field on the oscillating of a conductive spherical shell

WANG Yi-lin<sup>1</sup>, QIN Zi-heng<sup>2</sup>

(School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

**Abstract:** The effect of magnetic field on the rotation of a conductive spherical shell suspended by a thin wire is studied. By solving the electromagnetic equation of the system, the force and torque of the axisymmetric magnetic field on the spherical shell are given. The motion of the shell in the magnetic field is given. The experimental apparatus and measurement method are introduced. The angle of the spherical shell is measured, and the attenuation coefficients under different conditions are obtained, which qualitatively confirms the theoretical analysis. The magnetic field distribution of cylindrical magnet is estimated, the magnetic field distribution on the axis of magnet is measured, and the attenuation coefficient at different distances is calculated by numerical method, which is found to be quantitatively consistent with the experimental results.

**Keywords:** conductive shell; magnetic field; oscillating; IYPT2023-P2

2023 年 IYPT 的第二题是振荡球, 题目要求探究磁场的存在对于表面导电的球壳绕绳旋转振荡的运动的的影响。此前已经有学者对这一现象做过分析<sup>[1] [2]</sup>, 但其实验探究仅限于匀强磁场, 同时也并没有对磁场分布的改变进行研究。本文希望通过利用圆柱形磁铁产生的非匀强磁场进行实验, 并在实验过程中改变磁场的分布, 来对这一现象进行更具有一般性的探究和分析。

### 1 理论分析

首先对这一问题进行简单的定性分析: 当导电球壳在磁场中运动时, 导体中的自由电子受洛伦兹力驱动重新分布, 从而产生不均匀的电荷密度, 形成非零的电场强度。所以第一步需要找出电荷的分布, 并确定电势和电场。在磁场和电场的共同作用

下, 导体内将会产生电流, 电流受磁场的安培力作用, 可能会产生非零的力或力矩, 从而对球壳的转动产生影响。

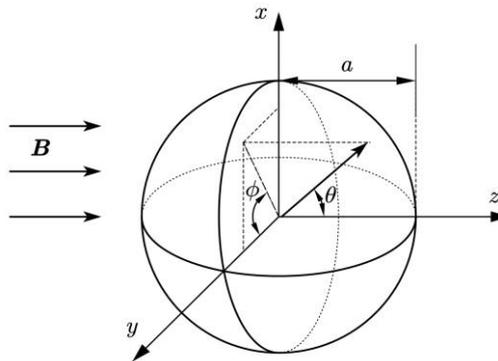


图 1 分析问题所使用的坐标系

为了研究这一问题，我们首先建立图 1 所示的空间坐标系，其中磁场  $\mathbf{B}$  沿  $z$  轴方向。设球壳的半径为  $a$ ，壁厚为  $h$  ( $h \ll a$ )，球壳材料的密度为  $\rho_m$ ，导电率为  $\sigma$ 。

为研究问题方便起见，我们设球转动的角速度为  $\omega$ ，球上一点的坐标为  $\mathbf{a}$ ，运动的速度为  $\mathbf{v}$ ，其中  $\mathbf{a}$  满足

$$\mathbf{a} = (a \sin \theta \cos \phi, a \sin \theta \sin \phi, a \cos \theta) \quad (1.1)$$

### 1.1 匀强磁场平行于转轴

首先分析最简单的情况：匀强磁场平行于转轴 ( $\mathbf{B} = B\hat{z}, \omega = \omega\hat{z}$ )，此时球上一点的速度为

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \omega \times \mathbf{a} = -\omega a \sin \theta \sin \phi \hat{x} + \omega a \sin \theta \cos \phi \hat{y} \\ &= \omega a \sin \theta \hat{\phi} \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中  $\theta, \phi$  的方向如图 1 中所示，洛伦兹力作用于电荷，会使电荷重新分布，产生电流，将洛伦兹力公式写为以下广义欧姆定律形式<sup>[3]</sup>：

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \sigma \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.3)$$

其中  $\mathbf{J}$  为电流密度， $\sigma$  为材料的电导率， $\mathbf{E}$  为电场强度。由于球壳很薄 ( $h \ll a$ )，可以认为电流密度  $\mathbf{J}$  没有径向分量，在分析问题时可以只考虑球壳的切向。根据电荷守恒我们知道  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ ，所以

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.4)$$

我们可以定义切向电荷密度  $\rho_t$ ，对应  $\mathbf{E}$  的切向分量  $\mathbf{E}_t$ ：

$$\begin{aligned} \rho_t &= \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_t = -\epsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_t \\ &= -\epsilon_0 \omega B (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= -2\epsilon_0 \omega B P_2^0(\cos \theta) \end{aligned} \quad (1.5)$$

其中  $P_2^0(\cos \theta)$  为二阶 Legendre 函数，电势分布满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \Phi_t = -\rho_t / \epsilon_0 = 2\omega B P_2^0(\cos \theta) \quad (1.6)$$

$$\Phi_t(\theta) = -\frac{\omega a^2 B}{3} P_2^0(\cos \theta) = \frac{\omega a^2 B}{6} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (1.7)$$

根据电势分布可以求出切向的电场强度  $\mathbf{E}_t$ ：

$$\mathbf{E}_t = -\nabla \Phi_t(\theta) = -\omega a B \sin \theta \cos \theta \hat{\theta} \quad (1.8)$$

因此电流密度  $\mathbf{J}$  为

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (1.9)$$

也就是球壳表面没有电流，因此没有安培力产生，磁场的存在不会对球壳的转动产生影响。

### 1.2 非匀强磁场平行于转轴

接下来分析磁场为非匀强的情况。我们假设磁场具有关于  $z$  轴的轴对称性，但并非匀强。磁场可

以在球坐标系下进行分解：

$$\mathbf{B}(r, \theta) = B_r(r, \theta) \hat{r} + B_\theta(r, \theta) \hat{\theta} \quad (1.10)$$

此时有

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\omega a \sin \theta B_\theta \hat{r} + \omega a \sin \theta B_r \hat{\theta} \quad (1.11)$$

由于我们只关注球壳的切向分量，所以只需考虑上式的第二项。为了便于分析计算，我们可以将磁场的径向分量  $B_r$  按 Legendre 多项式展开<sup>[4]</sup>：

$$B_r(a, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n P_n^0(\cos \theta) \quad (1.12)$$

其中已经利用了球壳的半径为  $a$ ，并且有

$$b_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi B_r(a, \theta) P_n^0(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (1.13)$$

与 1.1 中的分析同理，我们可以得到

$$\begin{aligned} \rho_t &= \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_t = -\epsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_t \\ &= -\epsilon_0 \omega \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[ \frac{(2+n)(n+1)}{2n+1} P_{n+1}^0(\cos \theta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(n-1)n}{2n+1} P_{n-1}^0(\cos \theta) \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

可以求出电势和电场

$$\Phi(\theta) = \omega a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2n+1} [P_{n+1}^0(\cos \theta) - P_{n-1}^0(\cos \theta)] \quad (1.15)$$

$$\mathbf{E}_t = -\nabla \Phi(\theta) = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_t \quad (1.16)$$

因此在这种情况下，球壳表面同样不会产生电流，磁场的存在不会影响球壳的转动。

### 1.3 非匀强磁场垂直于转轴

#### 1.3.1 磁场对球壳施加的力和力矩

我们依然假设磁场具有关于  $z$  轴的轴对称性，但是球壳的角速度为  $\omega = \omega \hat{x}$ ，和磁场的方向垂直。此时我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{B} &= a\omega B_\theta \cos \theta \cos \phi \hat{r} - a\omega B_r \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} \\ &\quad + a\omega B_r \sin \phi \hat{\phi} \end{aligned} \quad (1.17)$$

可以得到

$$\begin{aligned} \rho_t &= \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_t = -\epsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_t \\ &= -\epsilon_0 \omega \cos \phi \left[ 2 \sin \theta B_r(a, \theta) - \cos \theta \frac{\partial B_r(a, \theta)}{\partial \theta} \right] \\ &= \epsilon_0 \omega \cos \phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2n+1} \times \left[ (n-1) P_{n-1}^1(\cos \theta) \right. \\ &\quad \left. + (n+2) P_{n+1}^1(\cos \theta) \right] \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\Phi(\theta, \phi) = \omega a^2 \cos \phi \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n(n+1)} P_n^1(\cos \theta) \quad (1.19)$$

因此可以得到球壳的电流密度

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \sigma[-\nabla\Phi(\theta, \phi) + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_t] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sigma a \omega}{2} \left\{ -\cos\phi \left[ P_{n-1}^0(\cos\theta) + \frac{P_n^2(\cos\theta)}{n(n+1)} \right] \hat{\theta} \right. \\ &\quad \left. + \sin\phi \left[ P_n^0(\cos\theta) - \frac{P_n^2(\cos\theta)}{n(n+1)} \right] \hat{\phi} \right\} \end{aligned} \quad (1.20)$$

磁场作用于电流，得到球壳各处受力的力密度为

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \times \mathbf{B} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sigma a \omega}{2} \left\{ B_\theta \sin\phi \left[ -P_{n-1}^0(\cos\theta) + \frac{P_n^2(\cos\theta)}{n(n+1)} \right] \hat{r} \right. \\ &\quad \left. + B_r \sin\phi \left[ P_n^0(\cos\theta) - \frac{P_n^2(\cos\theta)}{n(n+1)} \right] \hat{\theta} \right. \\ &\quad \left. + B_r \cos\phi \left[ P_{n-1}^0(\cos\theta) + \frac{P_n^2(\cos\theta)}{n(n+1)} \right] \hat{\phi} \right\} \end{aligned} \quad (1.21)$$

利用 mathematica 对球壳所受的力积分<sup>[2]</sup>，有

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV = \frac{a^3 h \sigma \omega \pi}{2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(n+1)b_n b_{n+1}}{(2n+1)(2n+3)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b_{2n+i} c_i}{(2n+i)(2n+i+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nb_n c_n}{(n+1)(2n+1)} \right] \hat{y} \end{aligned} \quad (1.22)$$

即安培力的合力沿着与转轴和磁场均垂直的方向。但在后面的实验过程和数值计算中，我们将会看到这个力远小于球壳的重力，在分析球壳的运动过程中可以将其忽略。

而安培力的力矩为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \int_V \mathbf{a} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV \\ &= -\pi \sigma a^4 \omega h \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^\pi B_r P_n^0(\cos\theta) \sin\theta d\theta \hat{x} \end{aligned} \quad (1.23)$$

利用(1.12)中  $B_r$  展开的 Legendre 多项式完成积分：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= -2\pi \sigma a^4 \omega h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{2n+1} \hat{x} \\ &= -\pi \sigma a^4 \omega h \int_0^\pi B_r^2 \sin\theta d\theta \hat{x} \end{aligned} \quad (1.24)$$

得到安培力对球壳的总力矩，这是一个与角速度反方向的力矩，它会使球壳趋于更快地停止转动。

### 1.3.2 球壳的运动所受到的影响

由于细线会给球壳的转动提供回复力，所以在没有耗散的时候球壳做简谐振动，运动方程为

$$\ddot{\theta} = -\frac{\kappa}{I} \theta = -\omega_0^2 \theta \quad (1.25)$$

其中  $\kappa\theta$  为细线提供的回复力矩， $I$  为球壳的转动惯量，满足

$$I = \frac{2}{3} m a^2 = \frac{8}{3} \pi a^4 h \rho_m \quad (1.26)$$

当考虑耗散并加上磁场的阻滞力矩后，运动方程可以写为

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{\gamma} \dot{\theta} + \frac{1}{\alpha} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (1.27)$$

其中  $-\frac{\dot{\theta}}{\gamma I}$  为耗散力矩， $-\frac{\dot{\theta}}{\alpha I} = \tau$  为磁场产生的安培力的提供的阻力矩。定义  $b = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \right)$ ，则运动方程(1.27)可以化为标准阻尼振荡形式：

$$\ddot{\theta} + 2b\dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (1.28)$$

它的解可以写为

$$\theta(t) = D e^{-bt} \cos(\omega t + \delta) \quad (1.29)$$

其中  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ 。根据(1.27)式中的定义可以求出  $\alpha$ ：

$$\alpha = \frac{8\rho_m}{3\sigma \int_0^\pi B_r^2 \sin\theta d\theta} \quad (1.30)$$

由此我们得到了球壳的运动与磁场的关系式，在接下来的实验和计算中，将会定量检验这个关系的正确性。

## 2 实验测定

### 2.1 实验器材及实验方法

本实验中使用的是铜制球壳，其材质为黄铜 H62，查阅相关资料<sup>[5]</sup>可知该种黄铜材料的密度为  $\rho_m = 8.39 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，电导率  $\sigma = 1.624 \times 10^7 \text{ S/m}$ ，实验所用铜球半径  $a = 1.517 \text{ cm}$ ，质量  $m = 28.2 \text{ g}$ 。

实验使用的磁铁为圆柱形钕铁硼磁铁，其高度为  $h = 2.81 \text{ cm}$ ，半径为  $r = 2.39 \text{ cm}$ 。

经过试验，以透明胶线作为悬线悬挂球壳耗散较小，效果最佳。实验中采用的悬线长度为  $l = 36.4 \text{ cm}$ 。



图2 实验装置图（磁场垂直于转轴）

实际的实验装置如图 2 所示。在实验中利用热熔胶将细线的一段粘连在球上，另一端粘连在透明亚克力板上。实验时将手机放置在亚克力板上，对小球的运动状态进行记录；拍摄时手机摄像头与粘连点距离很近，使得手机视线与悬线几乎平行，以提高角度测量的精确性。

由于铜球表面反射较强，视频中球壳表面杂光较多，无法实现有效追迹，所以用黑色喷漆将小球喷为黑色，再使用涂改液在球壳上标定两个白点（如图 3），并放置黑色底板作为背景，同时降低手机相机的曝光度，使画面中可以清晰地看到两个白点，这样可以有效提高自动追迹的准确性。

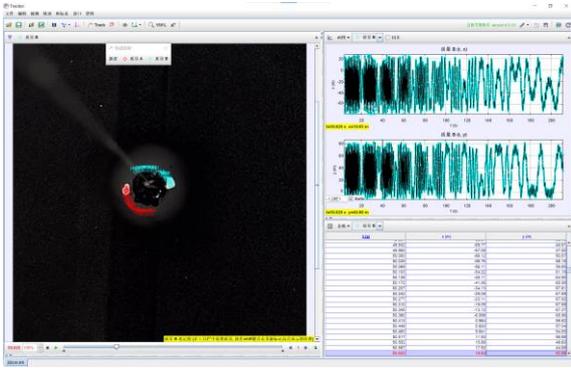


图 3 使用 tracker 软件追迹

使用 tracker 软件自动追迹的过程如图 3，在采集数据时，只需追踪两个白点的位置，它们的连线与坐标轴的夹角即为球壳的转角被限制在  $(-\pi, \pi]$  上的大小。使用 python 编程对数据进行处理，可以得到球壳的总转角（如图 4）。

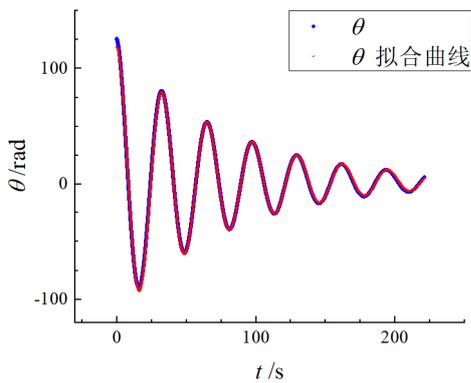


图 4 实验曲线和拟合曲线

利用 origin 软件中的非线性曲线拟合功能对实验数据进行拟合。定义阻尼振荡函数

$$\theta(t) = C + De^{-bt} \cos(\omega t + \delta) \quad (2.1)$$

其中  $C, D, b, \omega, \delta$  为五个拟合参数，分别表示阻尼振

荡的平衡位置、初始振幅、振幅衰减常数、简谐振荡频率和初始相位。一组具体数据的拟合如图 4 所示，可以看到拟合的效果很好，这证实了球壳做的运动是阻尼振荡。

## 2.2 磁场平行于转轴



图 5 实验装置图（磁场平行于转轴）

首先对磁场平行于转轴的情况进行实验。实验装置如图 5 所示，磁铁在球的下方；磁铁上放置了黑色薄片以提高画面中白点的清晰度，方便追迹。改变磁铁与球壳之间的距离，对球壳的运动进行测定并拟合，得到的数据如下表：

表 1 磁场平行于转轴对球壳转动的影响

$R / \text{cm}$	$b / \text{t}^{-1}$
6.5	0.00935
15.0	0.00916
25.0	0.00960
无磁场	0.00951

表中的  $R$  为磁铁的上表面到球壳球心的距离， $b$  为拟合公式(2.1)中的振幅衰减常数。根据拟合结果可以看出，磁场的变化对于球壳的阻尼振荡基本没有影响，这与理论分析的结果一致。

## 2.3 磁场垂直于转轴

接下来对磁场垂直于转轴的情况进行实验，实验装置如图 2 所示。将两块磁铁对称放置于球壳两侧等高处，改变磁铁与球壳之间的距离，对球壳的运动进行测定，并将测量结果进行拟合，得到的拟合参数如下表：

表 2 磁场垂直于转轴对球壳转动的影响

$R / \text{cm}$	$b / \text{t}^{-1}$	$\sigma_b / \times 10^{-5} \text{t}^{-1}$
-----------------	---------------------	---

18.0	0.04043	7
19.0	0.03262	5
20.0	0.02645	3
22.0	0.01921	2.4
24.0	0.01504	1.2
25.0	0.01383	1.3
26.0	0.01253	1.2
28.0	0.01098	1.0
30.0	0.01053	1.2
无磁场	0.00872	1.0

其中  $R$  是磁铁表面距离球壳球心的距离,  $b$  为拟合参数中的振幅衰减常数。从  $b$  随  $R$  的变化可以看出, 磁场越强, 振幅衰减的就越快, 也就是安培力对球壳的阻力矩越大, 这是与理论分析定性相符的。第三节中, 将对磁场分布建立模型, 进行数值计算, 并与实验结果进行对照, 来定量地验证理论公式。

另外, 在实验过程中球壳的质心位置并没有出现可观测的水平位移或速度。我们可以利用(1.22)的前几项对磁场给球壳施加的横向力的大小做一估计, 计算出  $F$  的数量级为  $10^{-5}$  N, 比小球的重力  $mg$  小四个数量级。由此可见, 在本实验的条件下, 这个横向力对球壳的影响确实可以忽略。

### 3 数值计算与理论验证

#### 3.1 磁场模型的建立

##### 3.1.1 理论模型的建立

假设磁铁是均匀磁化的, 则从分子电流的观点出发, 可以认为磁场是由磁铁侧表面的磁化电流激发的。设磁铁具有均匀的极化强度  $\mathbf{M}$ , 则在磁铁内部, 分子电流会相互抵消, 而在磁铁表面则会产生不为 0 的净表面电流, 其与磁化强度的关系为:

$$\alpha_s = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (3.1)$$

其中  $\alpha_s$  为磁铁表面的面电流密度,  $\hat{\mathbf{n}}$  为表面的法向单位矢量。

在磁铁上建立柱坐标系  $(r, \varphi, z)$ , 其中  $r$  为磁铁的半径,  $z$  轴以磁铁的底面为坐标原点。  $\mathbf{M}$  沿  $z$  轴方向, 则磁铁表面的电流元可以表示为:

$$Id\mathbf{l} = \alpha_s dz \cdot d\mathbf{l} = M(-r \sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + r \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}) d\varphi dz \quad (3.2)$$

利用 Biot-Savart 定律可以求出磁铁在空间中一点产生的磁场:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{Id\mathbf{l} \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \quad (3.3)$$

其中  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{r}$  分别为场点和源点的坐标, 由于磁铁具有轴对称性, 所以只需考虑  $Oxz$  平面内的情况, 代入电流元公式完成积分得到:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0 M}{4\pi} \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \varphi (z' - z)}{[x'^2 + r^2 - 2x'r \cos \varphi + (z' - z)^2]^{2/3}} d\varphi dz \\ B_z &= \frac{\mu_0 M}{4\pi} \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{r(r - x' \cos \varphi)}{[x'^2 + r^2 - 2x'r \cos \varphi + (z' - z)^2]^{2/3}} d\varphi dz \end{aligned} \quad (3.4)$$

上式给出了一块圆柱形磁铁在空间中一点产生的磁感应强度。

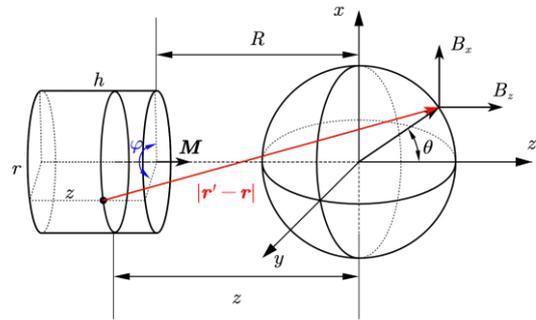


图 6 磁场在球壳  $\theta$  处产生磁场示意图

建立如图 6 所示的坐标系, 将两块磁铁在球壳  $\theta$  角处的磁场分量用积分的结果表示:

$$\begin{aligned} B_{ix}(\theta) &= \frac{\mu_0 M}{4\pi} \int_{-R-h}^{-R} \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \varphi (a \cos \theta - z)}{[a^2 \sin^2 \theta + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \varphi + (a \cos \varphi - z)^2]^{2/3}} d\varphi dz \\ B_{iz}(\theta) &= \frac{\mu_0 M}{4\pi} \int_{-R-h}^{-R} \int_0^{2\pi} \frac{r(r - a \sin \theta \cos \varphi)}{[a^2 \sin^2 \theta + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \varphi + (a \cos \varphi - z)^2]^{2/3}} d\varphi dz \\ B_{2x}(\theta) &= \frac{\mu_0 M}{4\pi} \int_R^{R+h} \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \varphi (a \cos \theta - z)}{[a^2 \sin^2 \theta + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \varphi + (a \cos \varphi - z)^2]^{2/3}} d\varphi dz \\ B_{2z}(\theta) &= \frac{\mu_0 M}{4\pi} \int_R^{R+h} \int_0^{2\pi} \frac{r(r - a \sin \theta \cos \varphi)}{[a^2 \sin^2 \theta + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \varphi + (a \cos \varphi - z)^2]^{2/3}} d\varphi dz \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中  $(r, \varphi, z)$  为磁铁侧表面上的点在柱坐标系下的坐标。  $\mathbf{M}$  为磁铁的磁化强度,  $R$  为磁铁上表面到球壳球心的距离,  $a$  为球壳半径,  $r$  为磁铁半径,  $h$  为磁铁高度,  $\theta$  为图 1 坐标系中标定的角度。

##### 3.1.2 磁化强度的拟合

根据 3.1.1 中的理论模型, 可以计算出磁铁  $z$  轴轴线上的磁场强度

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 M}{2} \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{z-h}{\sqrt{(z-h)^2 + a^2}} \right] \hat{\mathbf{z}} \quad (3.6)$$

使用毫特斯拉计对磁铁  $z$  轴上的磁感应强度进行测量, 得到的结果如下 (表 3, 图 7):

表 3 磁铁  $z$  轴的磁感应强度与距离的关系

$d/cm$	$B/mT$	$d/cm$	$B/mT$
7.0	11.1	12.0	2.4
7.5	8.9	12.5	2.2
8.0	7.6	13.0	1.9
8.5	6.6	13.5	1.7
9.0	5.6	14.0	1.5
9.5	4.7	14.5	1.4
10.0	4.1	15.0	1.2
10.5	3.6	15.5	1.1
11.0	3.3	16.0	1.0
11.5	2.9	16.5	0.9

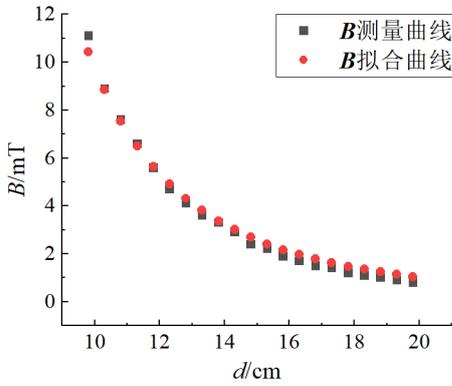


图 7 磁场强实验量及拟合图线

利用式(3.6)对上述数据进行拟合 (如图 7), 可以得到拟合参数  $\mu_0 M$  的大小:

$$\mu_0 M \pm \sigma_{\mu_0 M} = (82.7 \pm 1.0) \times 10^1 \text{ mT} \quad (3.7)$$

### 3.2 数值计算与实验的对照

由(3.5)可以表示出  $B_r(\theta)$  :

$$B_r(\theta) = (B_{1x} + B_{2x}) \sin \theta + (B_{1z} + B_{2z}) \cos \theta \quad (3.8)$$

由(1.30), 利用  $B_r(\theta)$  的表达式可以计算出  $\alpha$  的大小。为方便数值计算, 定义无量纲积分  $I$  :

$$I = \frac{1}{(\mu_0 M)^2} \int_0^\pi B_r^2(\theta) \sin \theta d\theta \quad (3.9)$$

利用这个无量纲积分, 可以将  $\alpha$  表示为

$$\alpha = \frac{8\rho_m}{3\sigma \cdot (\mu_0 M)^2 I} \quad (3.10)$$

再利用  $b$  的定义, 可以得到

$$b = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \right) = \frac{3\sigma(\mu_0 M)^2}{16\rho_m} \cdot I + \frac{1}{2\gamma} \quad (3.11)$$

可见振幅衰减常数  $b$  与积分值  $I$  满足线性关系。

使用 python 编程完成式(3.9)中的数值积分<sup>[6]</sup>, 并与  $b$  共同列表:

表 4 积分  $I$  与  $b$  对照表

$R/cm$	$I/\times 10^{-5}$	$b/s^{-1}$	$\sigma_b/\times 10^{-5}s^{-1}$
18.0	12.4601	0.04043	7
19.0	9.47033	0.03262	5
20.0	7.28277	0.02645	3
22.0	4.44469	0.01921	2.4
24.0	2.81458	0.01504	1.2
25.0	2.26729	0.01383	1.3
26.0	1.84013	0.01253	1.2
28.0	1.23674	0.01098	1.0
30.0	0.85179	0.01053	1.2
无磁场	0.00000	0.00872	1.0

将  $b-I$  作带误差的线性拟合  $b = kI + p$  (即使得

$\sum_i \frac{(\hat{b}_i - b_i)^2}{\sigma_{b_i}^2}$  取得最小值), 可以得到

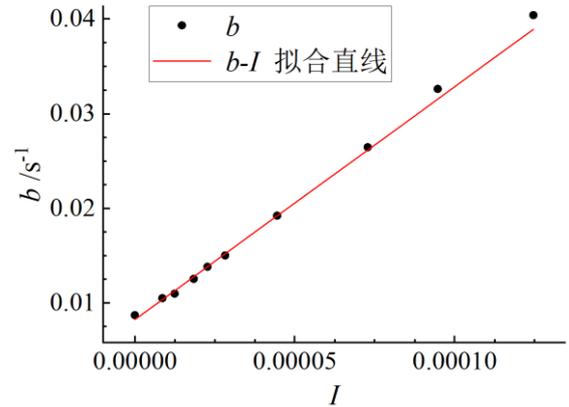


图 8  $b-I$  拟合直线图

$$k \pm \sigma_k = (246 \pm 7) s^{-1}$$

$$p \pm \sigma_p = (0.00828 \pm 0.00016) s^{-1} \quad (3.12)$$

$$r = 0.99704$$

得到的拟合参数如式(3.12)中所示, 拟合图线如图 8

所示 (由于  $\frac{\sigma_b}{b}$  非常小, 在图中做出误差棒并不清晰直观, 因此隐去误差棒), 可以看到,  $b$  和  $I$  的线性关系很好, 理论和实验相符程度很好。

### 3.3 理论与拟合结果对照及误差分析

根据理论公式(3.11)得到  $b = kI + p$  中的斜率  $k$  应该满足

$$k = \frac{3\sigma(\mu_0 M)^2}{16\rho_m} \quad (3.13)$$

代入  $\sigma, \rho_m, \mu_0 M$  的大小得到理论上的  $k_i$  为

$$k_i = \frac{3 \times 1.624 \times 10^7 \times (827 \times 10^{-3})^2}{16 \times 8.39 \times 10^3} \text{ s}^{-1} = 248.46 \text{ s}^{-1} \quad (3.14)$$

可以看到  $k_i - k < \sigma_k$ , 理论和实验在误差允许的范围

内一致。下面分析  $k_i$  的不确定度: 电导率的不确定度估计为  $\sigma_\sigma \approx 1\% \times \sigma = 1.6 \times 10^5 \text{ S/m}$ ,  $\mu_0 M$  的不确定度见 (3.7), 密度的不确定度估计为  $\sigma_{\rho_m} \approx 0.01 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,

因此可以计算  $k_i$  的不确定度:

$$\sigma_{k_i} = k_i \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_\sigma}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{\mu_0 M}}{\mu_0 M}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\rho_m}}{\rho_m}\right)^2} = 6.5 \text{ s}^{-1} \quad (3.15)$$

$$k_i \pm \sigma_{k_i} = (248 \pm 7) \text{ s}^{-1} \quad (3.16)$$

可以看到,  $k_i - k$  同样小于  $\sigma_{k_i}$ , 这就进一步验证了理论推导和实验结果的一致性。

## 4 结 论

在本实验中, 建立了磁场对球壳旋转的影响的理论模型, 得出了平行于转轴的磁场对球壳转动没有影响、垂直转轴的磁场会阻碍球壳的转动的结论, 并建立了阻力矩的大小的理论公式。之后分别

进行了实验和数值计算, 得到了与理论相一致的结果。本实验创新性地利用磁铁产生的磁场并改变磁场与球壳的距离进行实验, 并对得到的结果进行线性拟合, 这就更加精确和一般地验证了理论公式的正确性。但是受计算手段的限制, 本文并没有对非轴对称的磁场进行研究。本文得到的关于磁场对于导电物体旋转的影响的结论, 可能有助于航天器在地磁场中进行姿态调整。进一步的研究可以在大规模计算设备的辅助下, 对更为一般的磁场分布和物体形状进行探究。

## 参考文献:

- [1] Hertz H. On induction in rotating spheres[J]. Philosophical Magazine Series 1, 1880(10):451-452.
- [2] Youngquist R C, Nurge M A, Starr S O. A slowly rotating hollow sphere in a magnetic field: First steps to de-spin a space object[J]. American Journal of Physics, 2016(84):181-191.
- [3] Jackson J D. Classical Electrodynamics[M]. 3. John Wiley & Sons, 1999.
- [4] 吴崇试 高春媛. 数学物理方法[M]. 第三版. 北京大学出版社, 2019.
- [5] <https://alloys.copper.org/alloy/C28000>
- [6] 牟宗泽, 赵怀国, 彭从容. 多重积分数值方法研究[J]. 中国核科技报告, 1991(S3):79-80.