# 测定金属的杨氏模量

一、数据及处理

1、 数据记录

1） 金属丝长度$L$

由于使用米尺也可以使相对误差控制在$\frac{1mm}{1000mm}=0.1\%$的数量级，远小于结果中其他项的相对误差，所以用米尺测量一次即可：

$$l_1=105.03cm \quad l_2=25.60cm$$

2） 金属丝直径$d$

金属丝的直径测量的相对误差大约为$\frac{0.01mm}{0.3mm}\approx 3\%$，所以需要多次测量以减小误差，使用螺旋测微器测量十次：

螺旋测微器零点读数 $\mathrm{d}_0=0.000mm$

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_i/m$m | 0.319 | 0.321 | 0.321 | 0.319 | 0.320 | 0.321 | 0.322 | 0.320 | 0.321 | 0.320 |

3） 砝码质量$m$

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_i/g$ | 199.95 | 199.56 | 199.75 | 199.90 | 199.92 | 200.44 | 199.73 | 199.98 | 199.66 |

对砝码质量的测量认为是对一个质量约为$200g$的砝码测量了 10 次，这样便于之后处理过程中的不确定度的评估；

4） 金属丝拉伸量$\delta L$

| $i$ | $m/g$ | $r_i/mm$ | $r_i'/mm$ | $\overline{r_i}/mm$ | $\delta\overline{r_i}/mm$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00 | 4.00 | 3.99 | 3.995 | 0.615 |
| 2 | 199.95 | 3.86 | 3.86 | 3.860 | 0.605 |
| 3 | 399.51 | 3.75 | 3.74 | 3.745 | 0.605 |
| 4 | 599.26 | 3.62 | 3.62 | 3.620 | 0.595 |
| 5 | 799.16 | 3.50 | 3.50 | 3.500 | 0.590 |
| 6 | 999.08 | 3.38 | 3.38 | 3.380 | |
| 7 | 1199.52 | 3.25 | 3.26 | 3.255 | |
| 8 | 1399.25 | 3.14 | 3.14 | 3.140 | |
| 9 | 1599.23 | 3.03 | 3.02 | 3.025 | |
| 10 | 1798.89 | 2.91 | 2.91 | 2.910 | |

$\delta\overline{r_i}$是挂上 5 个砝码后金属丝的伸长量，所以挂上一个砝码后的$\delta L=\frac{\delta\overline{r_i}}{5}$；

5） 重力加速度$g$：由实验室给出参考值，认为是精确的

$$g=9.801m/s^2$$

2、 数据处理

1） 金属丝长度$L$

$$L=l_1-l_2=79.43cm$$

极限不确定度估计为米尺的允差：$e = 0.15cm$

单次测量认为误差均匀分布：$\sigma_L = \frac{e}{\sqrt{3}} = 0.087cm$

2） 金属丝直径$d$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{10} d_i}{10} = 0.3204mm$$

$A$类不确定度：

$$\sigma_{dA} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(d_i - \bar{d})^2}{10 \times (10-1)}} = 0.0003mm$$

极限不确定度估计为千分尺的允差：$e = 0.004mm$

$$\sigma_{dB} = \frac{e}{\sqrt{3}} = 0.0023mm$$

$$\sigma_d = \sqrt{{\sigma_{dA}}^2 + {\sigma_{dB}}^2} = 0.0023mm$$

3） 砝码质量$m$

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^{9} m_i}{9} = 199.877g$$

$A$类不确定度：

$$\sigma_{mA} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{9}(m_i - \bar{m})^2}{9 \times (9-1)}} = 0.085g$$

不确定度估计为电子天平的最小分度值：$\sigma_{mB} = 0.01g$

$$\sigma_m = \sqrt{{\sigma_{mA}}^2 + {\sigma_{mB}}^2} = 0.086g$$

4） 金属丝拉伸量

$$\overline{\delta \bar{r}_i} = \frac{\sum \delta \bar{r}_i}{n} = 0.6020mm$$

$A$类不确定度：

$$\sigma_{\Delta \bar{r}_i A} = 0.00436mm$$

将每个$\Delta \bar{r}_i$视为直接测量量，则其极限不确定度估计为仪器最小分度值：$e = 0.05mm$

$$\sigma_{\Delta \bar{r}_i B} = \frac{e}{\sqrt{3}} = 0.02887mm$$

$$\sigma_{\overline{\delta \bar{r}_i}} = \sqrt{{\sigma_{\delta \bar{r}_i A}}^2 + {\sigma_{\delta \bar{r}_i B}}^2} = 0.02920mm$$

$$\delta L = \frac{\overline{\delta \bar{r}_i}}{5} = 0.1204mm$$

$$\sigma_{\delta L} = \frac{\sigma_{\overline{\delta \bar{r}_i}}}{5} = 0.0059mm$$

3、 杨氏模量计算

1） 逐差法

之前在数据处理部分已经用逐差法处理过金属丝伸长量的数据，直接利用处理结果计算杨氏模量：

$$E=\frac{4mgL}{\pi d^2\delta L}=1.60294\times 10^{11}Pa$$

$$\sigma_E=E\times\sqrt{(\frac{\sigma_m}{m})^2+(\frac{\sigma_L}{L})^2+(\frac{2\sigma_d}{d})^2+(\frac{\sigma_{\delta L}}{\delta L})^2}=0.082\times 10^{11}Pa$$

$$E\pm\sigma_E=(1.603\pm 0.082)\times 10^{11}Pa$$

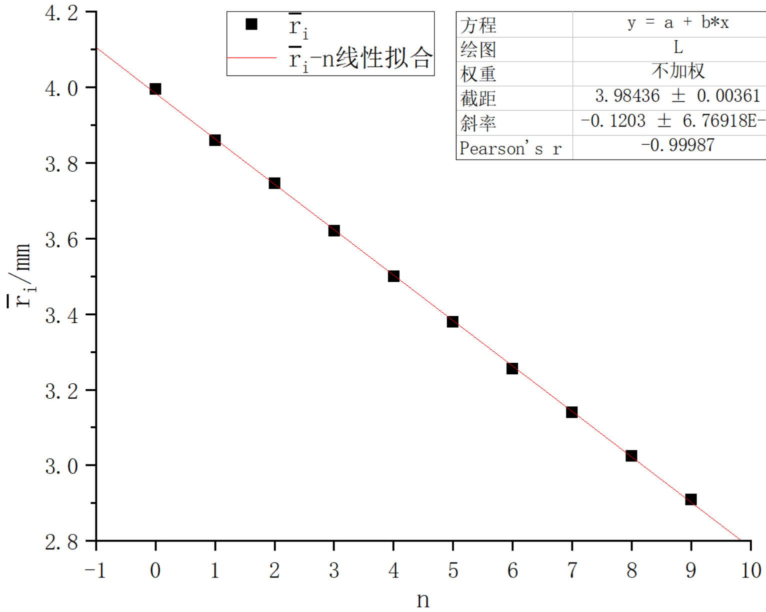
2） 最小二乘法

对杨氏模量计算公式做变形，得到：

$$\Delta L=\frac{4mgL}{\pi d^2 E}n \tag{1}$$

其中$\Delta L=\overline{r_i}-\overline{r_0}$表示金属丝总伸长量，$m$表示单个砝码的质量，$n$表示砝码的个数对$\overline{r_i}-n$线性拟合可以得到斜率，通过斜率可以反解出杨氏模量的大小

$$\overline{r_i}=a+bn$$




| | |
|---|---|
| 方程 | y = a + b*x |
| 绘图 | L |
| 权重 | 不加权 |
| 截距 | 3.98436 ± 0.00361 |
| 斜率 | -0.1203 ± 6.76918E-4 |
| Pearson's r | -0.99987 |

$\overline{r}_i$-n拟合图线

$$a=3.984$$

$$b=-0.120303$$

$$r=-0.99987$$

根据最小二乘法理论，可以算出斜率$b$的$A$类不确定度：

$$\sigma_{bA}=\sqrt{\frac{1/r^2-1}{n-2}}=0.000677$$

由于$\overline{r_i}$存在误差，所以斜率$b$的$B$类不确定度为：

$$\sigma_{bB}=\sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{n}(\frac{\partial b}{\partial\overline{r}_i}\sigma_{\Delta\overline{r}_iB})^2}=\sqrt{\sigma_{\Delta\overline{r}_iB}{}^2\sum_{i=1}^{n}[\frac{n_i-\bar{n}}{\sum_{i=1}^{n}(n_i-\bar{n})^2}]^2}=\frac{\sigma_{\Delta\overline{r}_iB}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(n_i-\bar{n})^2}}=0.003178$$

$$\sigma_b = \sqrt{(\sigma_{bA})^2 + (\sigma_{bB})^2} = 0.00325$$

由(1)式得到杨氏模量与斜率的关系为：

$$E = \frac{4mgL}{\pi d^2 |b|} = 1.60427 \times 10^{11} Pa$$

$$\sigma_E = E \times \sqrt{(\frac{\sigma_m}{m})^2 + (\frac{\sigma_L}{L})^2 + (\frac{2\sigma_d}{d})^2 + (\frac{\sigma_b}{b})^2} = 0.049 \times 10^{11} Pa$$

$$E \pm \sigma_E = (1.604 \pm 0.049) \times 10^{11} Pa$$

可见对于相同的测量数据，最小二乘法得到的不确定度小于逐差法所得到的不确定度，也就是对数据进行了更好的利用。

二、分析与讨论

在测量过程中，如果开始加第一、二个砝码时$r$的变化量大于正常量，产生这种现象的原因是开始时金属丝有弯折，挂上砝码后金属丝的伸长不仅是因为受力拉伸，还有因为弯折被拉直，所以这种情况测得的杨氏模量会比正常值偏小。

三、收获与感想

杨氏模量虽然是个基础实验，但认真做一做还是能学到很多东西的。我在这次实验中犯了低级错误，用外卡口卡住，结果用内卡口读数，这样的错误直接使我的结果偏离了将近 10%。在这次实验中我不仅学到了很多与物理实验相关的知识，还学到了很多并非物理相关的知识，虽然可能是小事，但注意到的话可以节省很多精力。做实验不是仅仅知道原理就能做好，还要积累好的实验习惯。