平衡和非平衡电桥

一、直流电桥测量电阻

1. 测量未知电阻的大小

(1)$R_x \approx 4k\Omega,\ E = 3.046V$:

①直接测量法

$R_1 = 5000.0\Omega,\ R_2 = 5000.0\Omega,\ R_0 = 4052\Omega$, 改变 R_0 的大小，得到 $\triangle R_0 = 3\Omega,\ \triangle n = 0.1$ 因此可以计算出：

$$R_x = \frac{R_1}{R_2}R_0 = 4052\Omega,\ \delta R_x = \frac{0.2R_1\triangle R_0}{\triangle n \cdot R_2} = 5.8\Omega$$

$$\sigma_{R_x} = \sqrt{(\delta R_x)^2 + (\frac{R_0}{R_2}\sigma_{R_1})^2 + (\frac{R_0R_1}{R_2^2}\sigma_{R_2})^2 + (\frac{R_1}{R_2}\sigma_{R_0})^2} = 9\Omega$$

$$R_x \pm \sigma_{R_x} = (4052 \pm 9)\Omega$$

其中 R_1, R_2, R_0 的阻值的不确定度利用仪器给出的不确定度公式 [1] 计算，后面利用到电阻箱的阻值时不确定度也都按照此公式计算.

②交换桥臂法

$R_1 = 5000.0\Omega,\ R_2 = 4000.0\Omega$

第一次测量给出 $R_10 = 3239\Omega,\ \triangle R_0 = 3\Omega,\ \triangle n = 0.1$, 有 $\delta R_{x1} = \frac{0.2R_1\triangle R_0}{\triangle n \cdot R_2} = 5.3\Omega$

第二次测量给出 $R_20 = 5059\Omega,\ \triangle R_0 = 3\Omega,\ \triangle n = 0.1$, 有 $\delta R_{x2} = \frac{0.2R_1\triangle R_0}{\triangle n \cdot R_2} = 5.8\Omega$

估计由电桥灵敏度带来的总不确定度为 $\delta R_x = \sqrt{\frac{1}{2}\delta R_{x1}^2 + \frac{1}{2}\delta R_{x2}^2} = 5.6\Omega$ 故有

$$R_x = \sqrt{R_{10}R_{20}} = 4048\Omega$$

$$\sigma_{R_x} = \sqrt{\delta R_x^2 + (\frac{\partial R_x}{\partial R_{10}}\sigma_{R_{10}})^2 + (\frac{\partial R_x}{\partial R_{20}}\sigma_{R_{20}})^2} = \sqrt{\delta R_x^2 + \frac{R_{20}}{R_{10}}(\frac{1}{2}\sigma_{R_{10}})^2 + \frac{R_{10}}{R_{20}}(\frac{1}{2}\sigma_{R_{20}})^2} = 6\Omega$$

$$R_x \pm \sigma_{R_x} = (4048 \pm 6)\Omega$$

(2)$R_x \approx 360\Omega,\ E = 3.046V$:

①直接测量法

$R_1 = 350.0\Omega,\ R_2 = 300,0\Omega,\ R_0 = 318.5\Omega$, 改变 R_0 的大小，得到 $\triangle R_0 = 0.1\Omega,\ \triangle n = 0.4$ 因此可以计算出：

$$R_x = \frac{R_1}{R_2}R_0 = 371.6\Omega,\ \delta R_x = \frac{0.2R_1\triangle R_0}{\triangle n \cdot R_2} = 0.06\Omega$$

$$\sigma_{R_x} = \sqrt{(\delta R_x)^2 + (\frac{R_0}{R_2}\sigma_{R_1})^2 + (\frac{R_0R_1}{R_2^2}\sigma_{R_2})^2 + (\frac{R_1}{R_2}\sigma_{R_0})^2} = 0.6\Omega$$

$$R_x \pm \sigma_{R_x} = (371.6 \pm 0.6)\Omega$$

②交换桥臂法

$R_1 = 400.0\Omega,\ R_2 = 300.0\Omega$

第一次测量给出 $R_10 = 278.7\Omega,\ \triangle R_0 = 0.1\Omega,\ \triangle n = 0.3$, 有 $\delta R_{x1} = \frac{0.2R_1\triangle R_0}{\triangle n \cdot R_2} = 0.09\Omega$

第二次测量给出 $R_20 = 495.5\Omega,\ \triangle R_0 = 0.1\Omega,\ \triangle n = 0.5$, 有 $\delta R_{x2} = \frac{0.2R_1\triangle R_0}{\triangle n \cdot R_2} = 0.03\Omega$

估计由电桥灵敏度带来的总不确定度为 $\delta R_x = \sqrt{\frac{1}{2}\delta R_{x1}^2 + \frac{1}{2}\delta R_{x2}^2} = 0.07\Omega$ 故有

$$R_x = \sqrt{R_{10}R_{20}} = 371.6\Omega$$

$$\sigma_{R_x} = \sqrt{\delta R_x^2 + (\frac{\partial R_x}{\partial R_{10}}\sigma_{R_{10}})^2 + (\frac{\partial R_x}{\partial R_{20}}\sigma_{R_{20}})^2} = \sqrt{\delta R_x^2 + \frac{R_{20}}{R_{10}}(\frac{1}{2}\sigma_{R_{10}})^2 + \frac{R_{10}}{R_{20}}(\frac{1}{2}\sigma_{R_{20}})^2} = 0.3\Omega$$

$$R_x \pm \sigma_{R_x} = (371.6 \pm 0.3)\Omega$$

(3)$R_x \approx 47\Omega,\ E = 3.048V$:

①直接测量法

$R_1 = 50.0\Omega,\ R_2 = 400.0\Omega,\ R_0 = 376.6\Omega$, 改变 R_0 的大小，得到 $\triangle R_0 = 0.1\Omega,\ \triangle n = 3.7$ 因此可以计算出：

$$R_x = \frac{R_1}{R_2}R_0 = 47.08\Omega,\ \delta R_x = \frac{0.2R_1\triangle R_0}{\triangle n \cdot R_2} = 0.007\Omega$$

$$\sigma_{R_x} = \sqrt{(\delta R_x)^2 + (\frac{R_0}{R_2}\sigma_{R_1})^2 + (\frac{R_0R_1}{R_2^2}\sigma_{R_2})^2 + (\frac{R_1}{R_2}\sigma_{R_0})^2} = 0.4\Omega$$

$$R_x \pm \sigma_{R_x} = (47.1 \pm 0.4)\Omega$$

②交换桥臂法

$R_1 = 50\Omega,\ R_2 = 45\Omega$

第一次测量给出 $R_10 = 42.4\Omega,\ \triangle R_0 = 0.1\Omega,\ \triangle n = 4.3$, 有 $\delta R_{x1} = \frac{0.2R_1\triangle R_0}{\triangle n\cdot R_2} = 0.005\Omega$

第二次测量给出 $R_20 = 52.3\Omega,\ \triangle R_0 = 0.1\Omega,\ \triangle n = 4.1$, 有 $\delta R_{x2} = \frac{0.2R_1\triangle R_0}{\triangle n\cdot R_2} = 0.004\Omega$

估计由电桥灵敏度带来的总不确定度为 $\delta R_x = \sqrt{\frac{1}{2}\delta R_{x1}^2 + \frac{1}{2}\delta R_{x2}^2} = 0.005\Omega$ 故有

$$R_x = \sqrt{R_{10}R_{20}} = 47.09\Omega$$

$$\sigma_{R_x} = \sqrt{\delta R_x^2 + (\frac{\partial R_x}{\partial R_{10}}\sigma_{R_{10}})^2 + (\frac{\partial R_x}{\partial R_{20}}\sigma_{R_{20}})^2} = \sqrt{\delta R_x^2 + \frac{R_{20}}{R_{10}}(\frac{1}{2}\sigma_{R_{10}})^2 + \frac{R_{10}}{R_{20}}(\frac{1}{2}\sigma_{R_{20}})^2} = 0.04\Omega$$

$$R_x \pm \sigma_{R_x} = (47.09 \pm 0.04)\Omega$$

2. 研究电桥灵敏度

电桥灵敏度的理论公式为

$$S = \frac{S_iE}{R_1 + R_2 + R_0 + R_x + R_g(2 + \frac{R_1}{R_x} + \frac{R_0}{R_2})}$$

改变公式中的参数，探究各个条件对电桥灵敏度的影响.

(1) 电源电压 E:

控制 $R_1 = 400.0\Omega,\ R_2 = 400.0\Omega,\ R_x = 371.6\Omega$, 平衡时 $R_0 = 371.6\Omega$. 其中，对 $\triangle n$ 和 $\triangle R_0$ 进行线性拟合，得到的斜率记为 k，则灵敏度可以表示为 $S = kR_0$

E/V	$\triangle n$				k	S_{Exp}	S_{Thr}
	$\triangle R_0/\Omega$	0.1	0.2	0.3			
3.060		0.3	0.7	1.1	4.0	1486	1483
4.561		0.6	1.1	1.8	6.0	2230	2210
6.123		0.8	1.7	2.5	8.5	3159	2968

表 1: 电桥灵敏度 S 随电源电压 E 的变化

(2)R_2 大小:
控制 $E = 5.035V,\ R_1 = 400.0\Omega,\ R_x = 371.6\Omega$

R_2/Ω	R_0/Ω	$\triangle n$				k	S_{Exp}	S_{Thr}
		$\triangle R_0/\Omega$	0.1	0.2	0.3			
200.0	185.8		1.8	3.1	4.9	15.5	2878	3254
400.0	371.6		0.8	1.2	2.0	6.0	2230	2440
600.0	557.5		0.3	0.8	1.1	4.0	2230	1952

表 2: 灵敏度 S 随桥臂电阻 R_2 的变化

(3)R_1 大小:
控制 $E = 5.035V,\ R_2 = 400.0\Omega,\ R_x = 371.6\Omega$

R_1/Ω	R_0/Ω	$\triangle n$				k	S_{Exp}	S_{Thr}
		$\triangle R_0/\Omega$	0.2	0.4	0.6			
200.0	743.3		0.7	1.1	1.8	2.75	2044	2199
400.0	371.6		1.1	2.6	3.8	6.75	2508	2440
600.0	247.7		1.8	3.7	5.4	9.0	2230	2324

表 3: 灵敏度 S 随桥臂电阻 R_1 的变化

3. 思考题:
①电源电压大幅度下降会加大测量误差.
②电源电压稍有波动不会加大测量误差.
③导线电阻不可忽略会加大测量误差.
④检流计零点没有校准会加大测量误差.
⑤检流计灵敏度不够高会加大测量误差.

二、非平衡电桥测量铂电阻的温度系数

1. 将测量结果列表并作图

(1) 控制电流为 $I = 4.000mA$，在实验过程中保持不变.
在 $T = 0.2\,°\mathrm{C}$ 时调节电桥平衡, 有 $R_p = 100.2\Omega,\ U_{out} = 0.03mV$.
(2) 在 $0 \sim 100\,°\mathrm{C}$ 的范围内进行测量:
对测量得到的 U_{out} 和 T 进行线性拟合 $U_{out} = aT + b$，得到

$$a = 0.76065mV/°\mathrm{C}$$
$$b = -0.01mV$$
$$r = 0.999991$$

根据最小二乘法的理论，可以算出斜率 a 的 A 类不确定度：

$$\sigma_{aA} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{r^2}}{n-2}} = 0.00073mV/°\mathrm{C}$$

由于万用电表的测量存在误差，所以每个 U_{out} 均存在误差，可根据万用电表的性能 [2] 估计为 $\sigma_{U_{out}B} = 0.06mV$，所以斜率 a 的 A 类不确定度为

$$\sigma_{aB} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial a}{\partial U_{out}}\sigma_{U_{out}})^2} = \sqrt{\sigma_{U_{out}}^2 \sum_{i=1}^{n}[\frac{U_{out}-\bar{U}_{out}}{\sum_{i=1}^{n}(U_{out}-\bar{U}_{out})^2}]^2} = \frac{\sigma_{U_{out}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(U_{out}-\bar{U}_{out})^2}} = 0.00057mV/°\text{C}$$

得到 a 的总不确定度 σ_a 为：

$$\sigma_a = \sqrt{\sigma_{aA}^2 + \sigma_{aB}^2} = 0.0009mV/°\text{C}$$

$T/°\text{C}$	U_{out}/mV	$T/°\text{C}$	U_{out}/mV
5.0	3.72	55.0	41.94
10.0	7.54	60.0	45.75
15.0	11.37	65.0	49.51
20.0	15.22	70.0	53.25
25.0	19.02	75.0	57.08
30.0	22.92	80.0	60.90
35.0	26.47	85.0	64.60
40.0	30.48	90.0	68.39
45.0	34.30	95.0	72.01
50.0	38.18	100.2	76.18

表 4: 非平衡电压 U_{out} 与温度 T 的关系

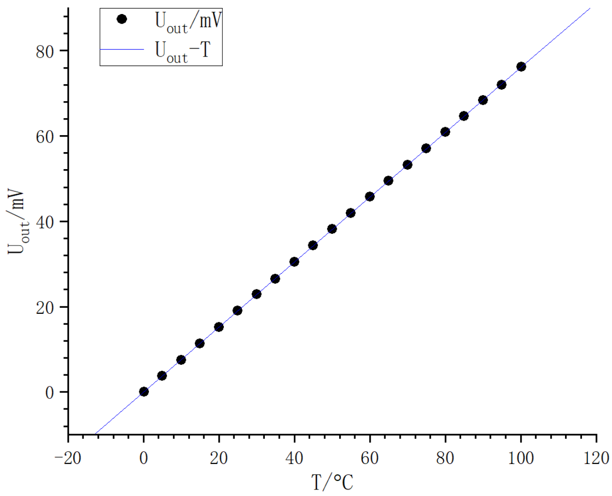

图 1: 非平衡电压 U_{out} 与温度 T 的关系

2. 计算铂电阻的温度系数 A_1 及其不确定度

由理论公式 $U_{out}=\frac{I_0}{2}R_0A_1\triangle T$ 及 $U_{out}-T$ 的线性拟合得到 $A_1=\frac{2a}{I_0R_0}$，其中有 $\sigma_{I_0}=0.001mA$, $\sigma_{R_0}=0.1\Omega$，所以有

$$A_1=\frac{2a}{I_0R_0}=3.796^{\circ}\mathrm{C}^{-1}$$
$$\sigma_{A_1}=A_1\cdot\sqrt{(\frac{\sigma_a}{a})^2+(\frac{\sigma_{I_0}}{I_0})^2+(\frac{R_0}{R_0})^2}=0.006^{\circ}\mathrm{C}^{-1}$$
$$A_1\pm\sigma_{A_1}=(3.796\pm0.006)^{\circ}\mathrm{C}^{-1}$$

3. 思考题

(1)①两路电流不相等，措施：选取 $R_1=R_2\gg R_T$；②$\triangle R_T$ 与 $\triangle T$ 关系的非线性，措施：将测温范围限制在 $0\sim100^{\circ}\mathrm{C}$；

(2) 若拟合时发现截距不为 0，则说明 $R_p\neq R_0$，这会使温度的测量拥有一个固定的系统误差.

参考文献

[1] http://sdgchina.com/page14?product_id=284&brd=1

[2] 吕斯骅段家忯张朝晖. 新编基础物理实验 [M]. 第二版. 高等教育出版社, 2013.