



北京大學
PEKING UNIVERSITY

Ball on Ferrite Rod

王艺霖

2023年6月3日





CONTENTS

1

实验介绍

2

铁氧体棒

3

球的运动

4

结论展望



1
PART 01

实验介绍

IYPT2023 T11 Ball on Ferrite Rod 铁氧体棒上的球

- A ferrite rod is placed at the bottom end of a vertical tube. Apply an ac voltage, of a frequency of the same order as the natural frequency of the rod, to a fine wire coil wrapped around its lower end. When a ball is placed on top of the rod, it will start to bounce. Explain and investigate this phenomenon.
- 把一个铁氧体棒放在垂直管的底部。把频率与棒的固有频率同阶的交流电压施加到缠绕在棒下方的细线圈上。当把一个球放在棒的上方时，球将会开始弹跳。解释并研究这个现象。



题目分析

- 实验目的

探究铁氧体棒的振动特性及其对交流磁场的响应，并分析小球在振动平台上的弹跳运动.

- 实验内容：分析铁氧体棒纵向振动模式，并研究铁氧体棒在交流磁场中的振动情况，利用COMSOL仿真；对小球在振动平台上的弹跳进行理论分析和数值模拟.

Two overlapping light blue diamond shapes are positioned behind the text. The left diamond is smaller and partially overlaps the larger diamond on the right.

02
PART 02
02

铁氧体棒



自由振动

铁氧体棒可以认为是一根圆柱体，其半径为 $r = 6\text{mm}$ ，长度为 $L = 20\text{cm}$ 。

相关性质：

- 杨氏模量 E （未知，将利用实验频率与理论频率的对比得到）
- 质量密度 $\rho = 4.9 \times 10^3 \text{kg/m}^3$
- 横截面积 $A = \pi r^2$
- 截面惯性矩 $I = \frac{1}{4} \pi r^4$

杨氏模量

为了测定铁氧体棒的杨氏模量，分析铁氧体棒的横向自由振动，满足如下的 Euler-Bernoulli 方程^[1]：

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

给出横向振动的频率为：

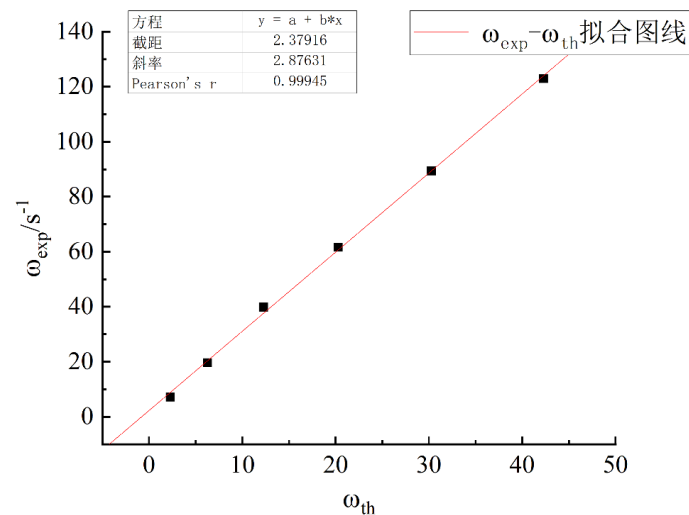
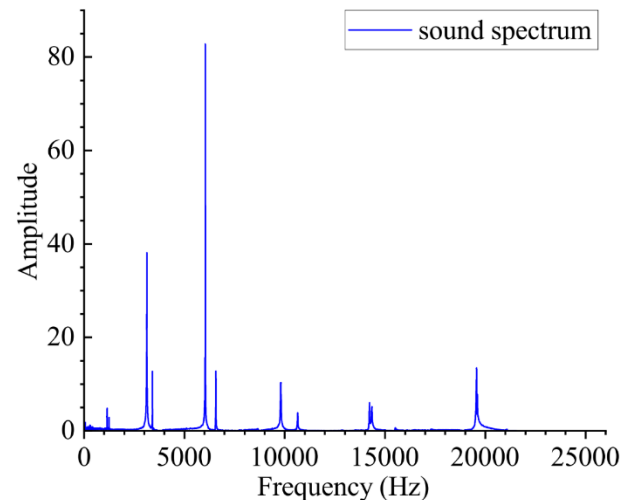
$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

$$\cosh(\beta_n L) \cos(\beta_n L) = 1$$

其中 $\beta = \sqrt{\frac{\omega}{c}}$, $c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$

对理论和实验的结果进行拟合之后可以从斜率得到杨氏模量的大小

$$E = 7.40 \times 10^{10} \text{ Pa}$$



纵向振动

在施加纵向的交变磁场的时候铁氧体棒进行的是纵向的振动，满足方程：

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

这是一个标准的波动方程，波速 $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 。

如果一端固定，另一端自由振动，有 $\lambda = 4L$ ，可以得到铁氧体棒在这种模式下振动的基频为

$$f_0 = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

磁致伸缩理论



磁致伸缩的微观机制^[2]:

- 无磁场时, 磁畴取向随机;
- 施加磁场后, 磁畴的取向趋向于与磁场同向, 材料整体发生形变。

磁致伸缩系数 $\lambda = \delta l / l$ 。

磁致伸缩的特点:

- 饱和性;
- 二倍频效应;

[2] R. D. James & Manfred Wuttig (1998) Magnetostriction of martensite, Philosophical Magazine A, 77:5, 1273-1299, DOI: [10.1080/01418619808214252](https://doi.org/10.1080/01418619808214252)

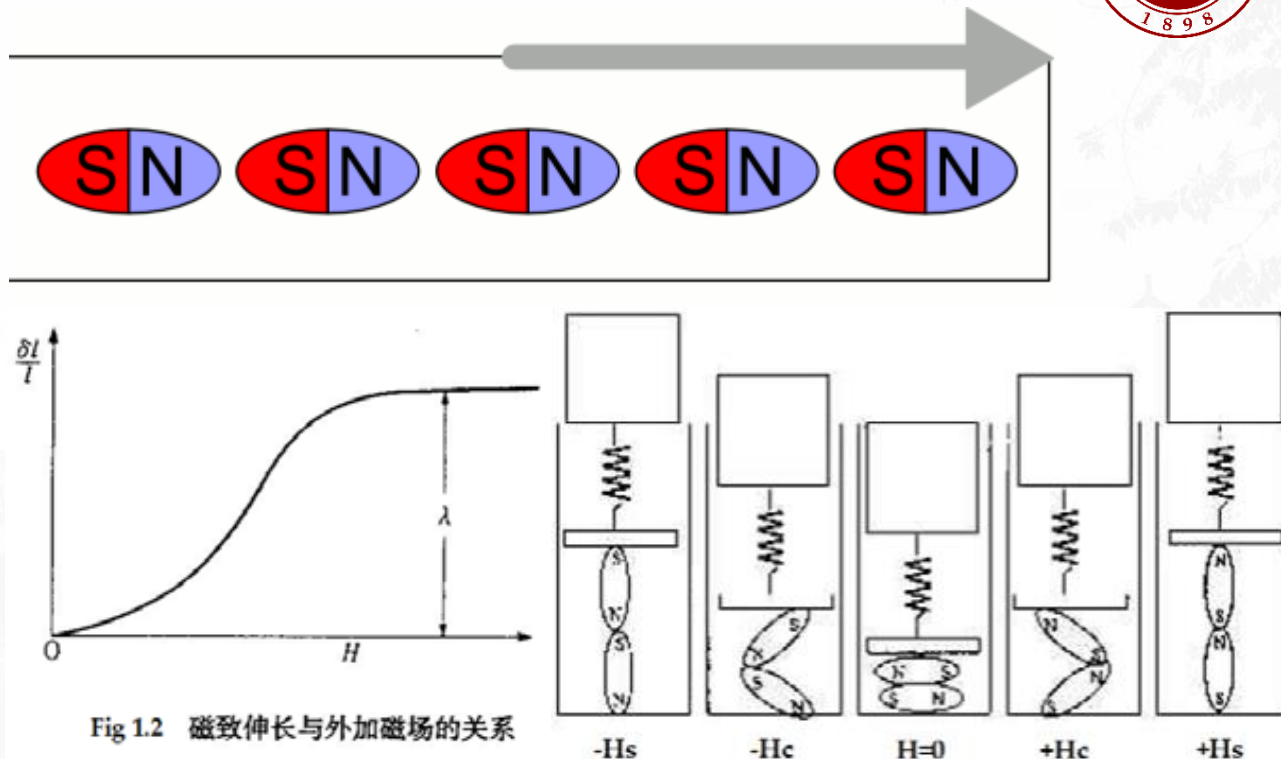
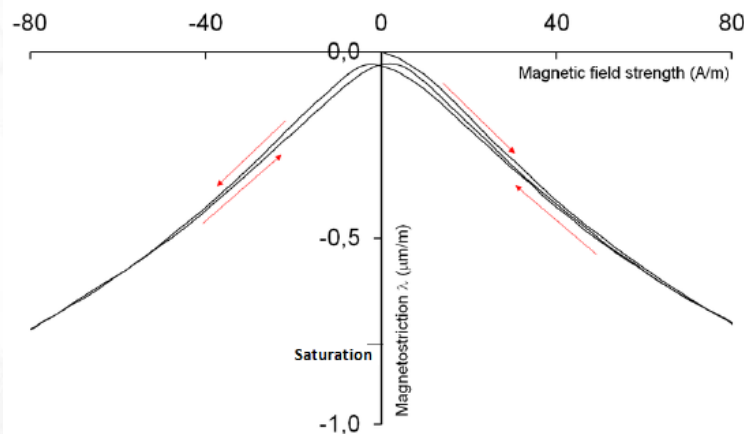


Fig 1.2 磁致伸长与外加磁场的关系

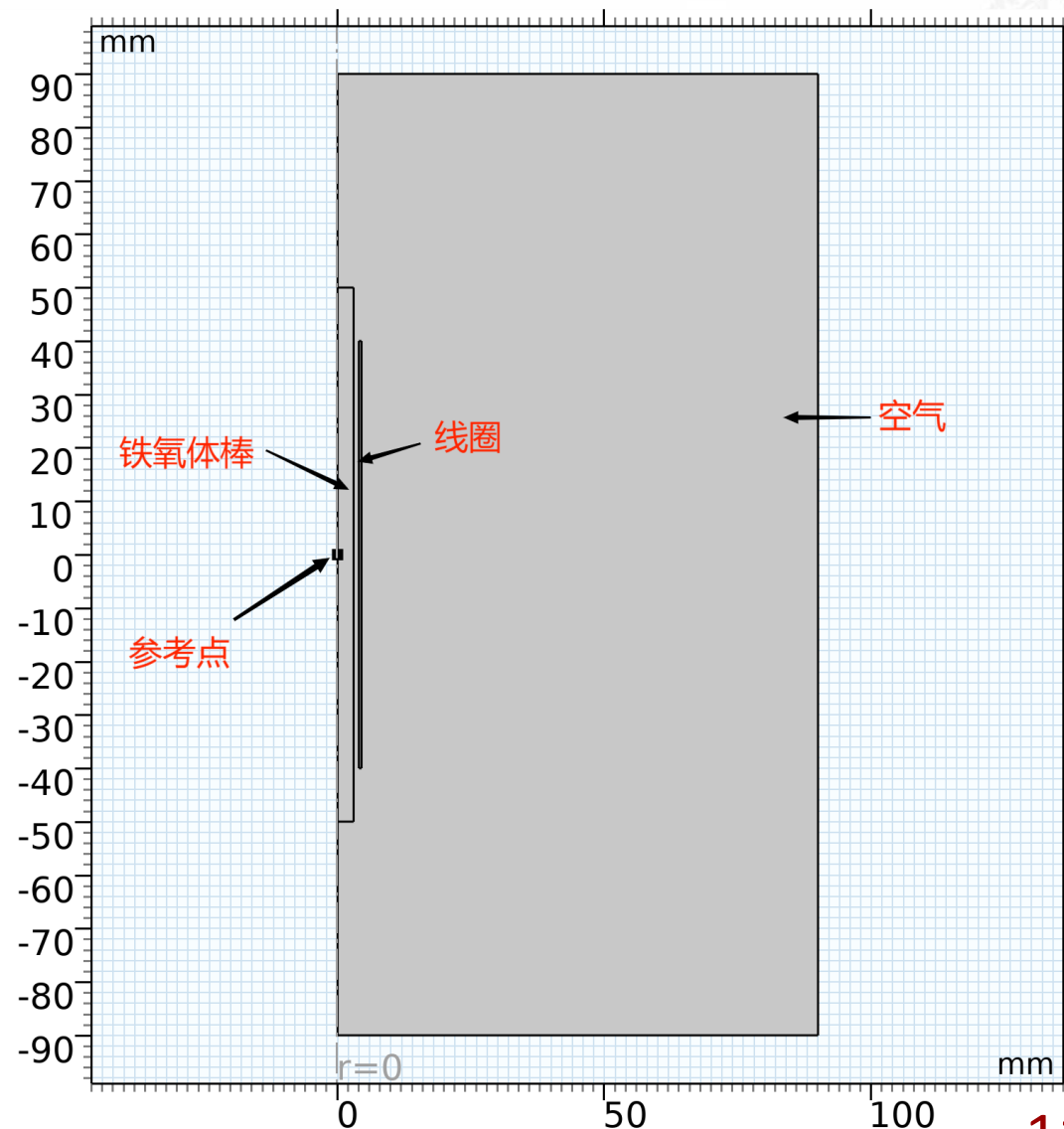


COMSOL模拟



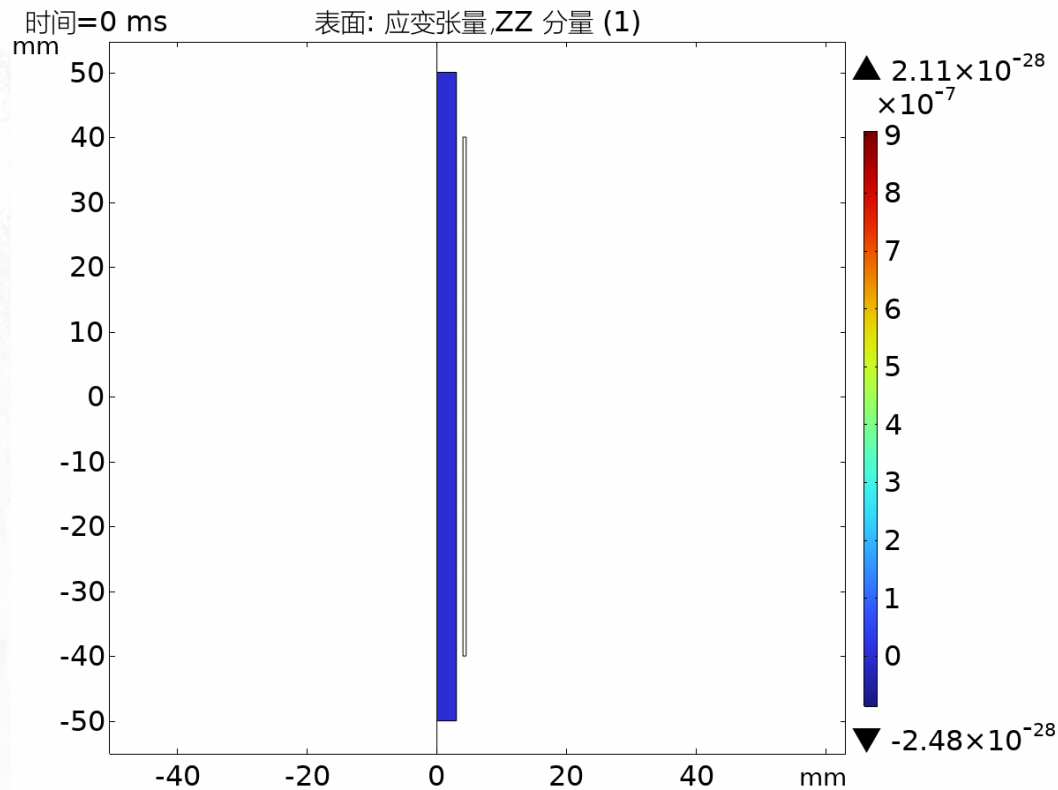
利用COMSOL进行仿真，验证铁氧体棒在交变磁场中的纵向振动特性。

- 铁氧体棒与线圈模型的轴对称投影如右图。线圈设为1000匝，通过振幅 $I = 0.1A$ 、频率 $f = 1000Hz$ 的交流电。
- 模拟总时长为 $5ms$ ，步长 $0.01ms$ 。

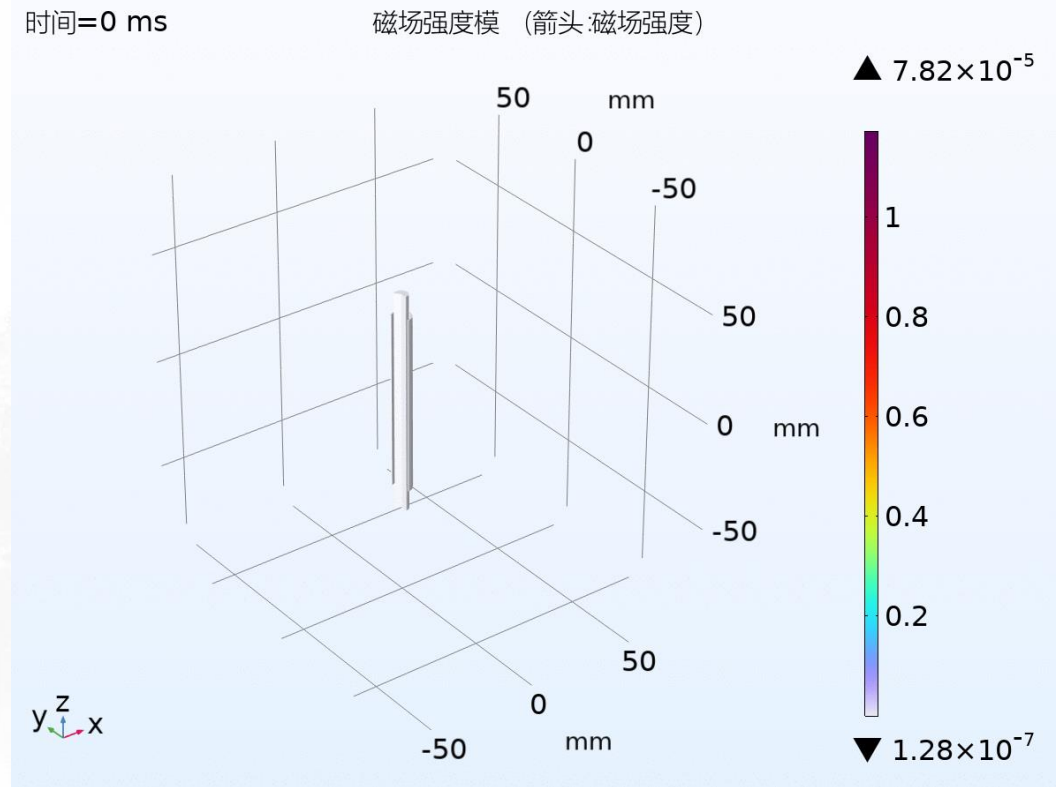


COMSOL模拟

应变模拟动画：



磁场模拟动画：

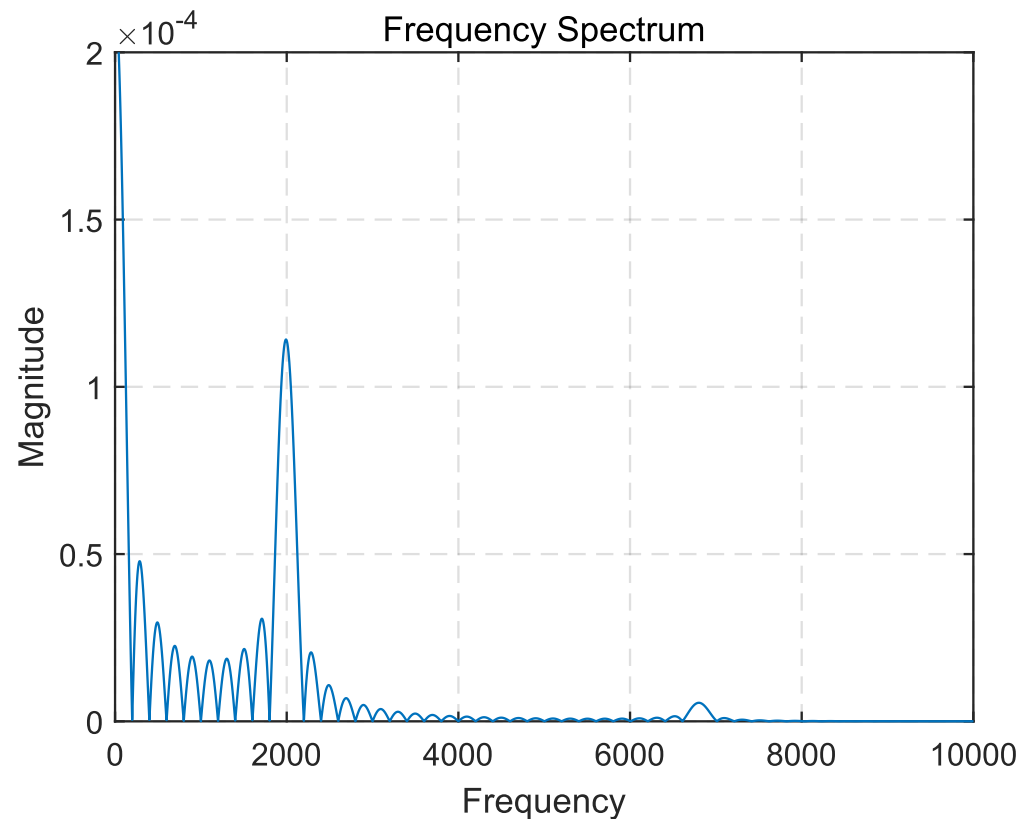
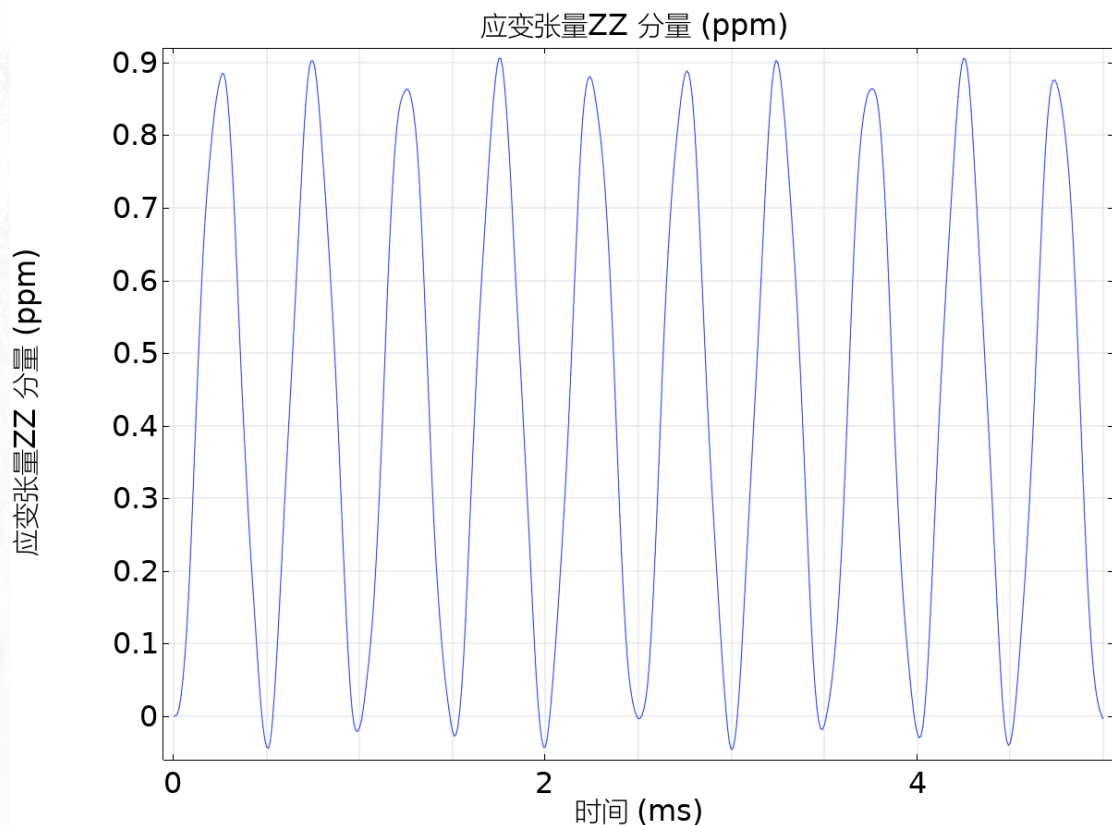


在该条件下应变张量ZZ分量的峰值在 10^{-7} 量级，远远小于实现小球弹跳所需的 $10^{-4} \sim 10^{-3}$ 量级。

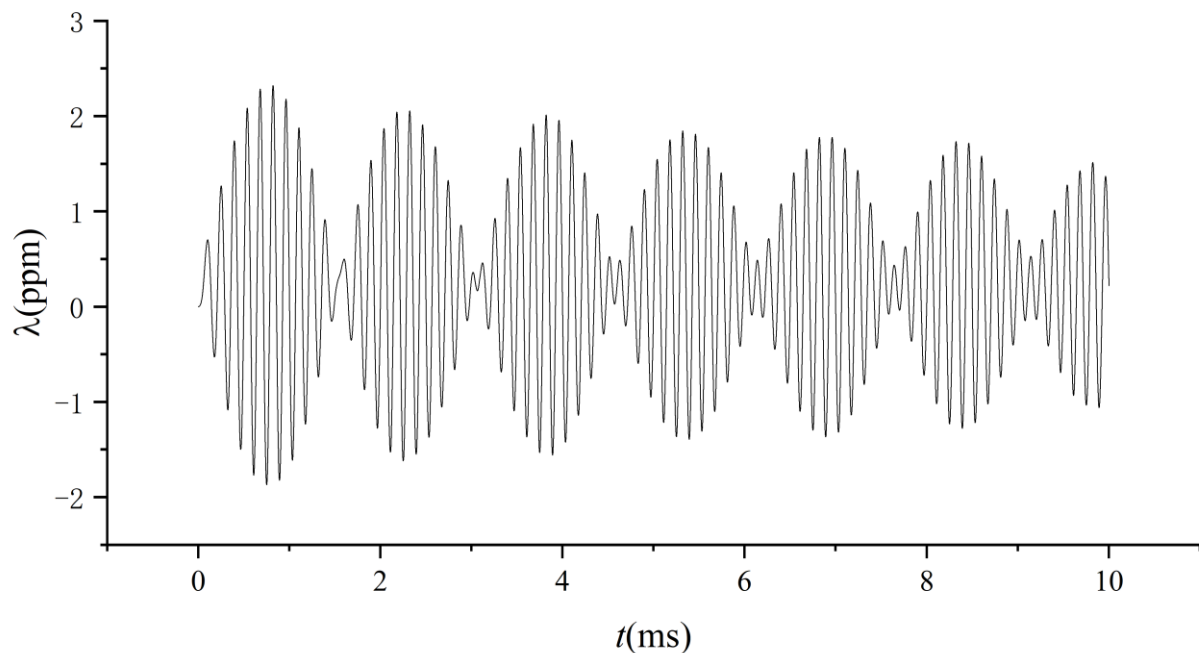
COMSOL模拟



作出参考点处的应变张量ZZ分量随时间的关系图以及相应的傅里叶变换图如下



在傅里叶变换的结果中可以得到：除了直流分量外最高的频率分量为1992Hz，与理论预期（2000Hz）的相对偏差只有0.4%。



$$f_0 = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

理论公式给出的基频为 $f_{th} = 6903\text{Hz}$ ，施加一个大小为 $f_{drive} = 3650\text{Hz}$ 的交流磁场（对应激发频率 $f_{sim} = 7300\text{Hz}$ ），可以明显看到拍的现象，这说明了理论计算给出的基频的确是铁氧体棒纵向振动的基频。



4.
PART 04
T

球的运动

实验现象



数值模拟



- 认为平台做简谐振动，小球与平台之间发生非弹性碰撞，小球在两次碰撞之间只受重力作用，参数如下：

碰撞的恢复系数： η

平台振动圆频率： ω

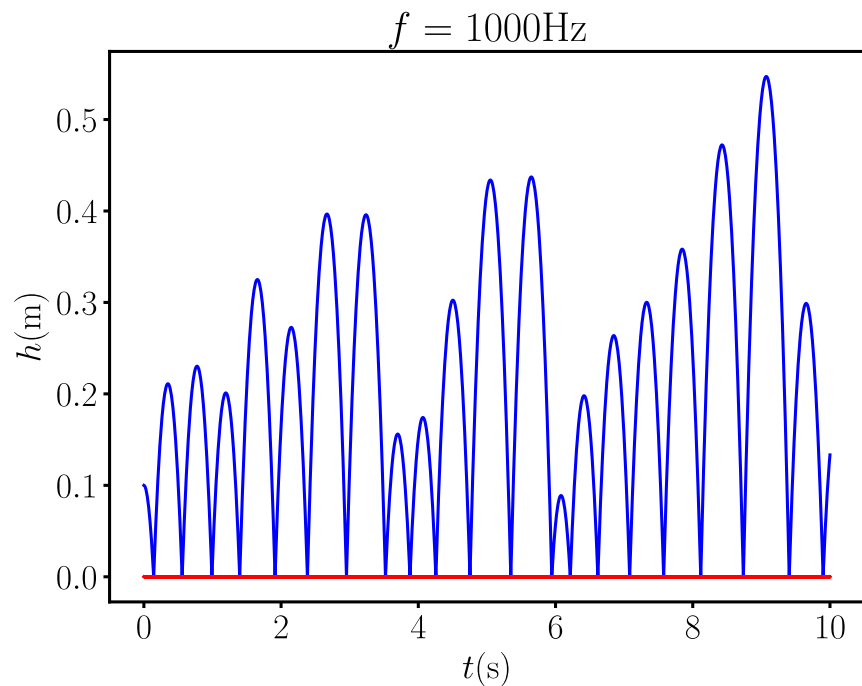
平台振动振幅： A

- 设小球在第 n 次碰撞之前的速度为 v_n （向上为正方向），平台速度为 u_n ，则小球碰后的速度为：

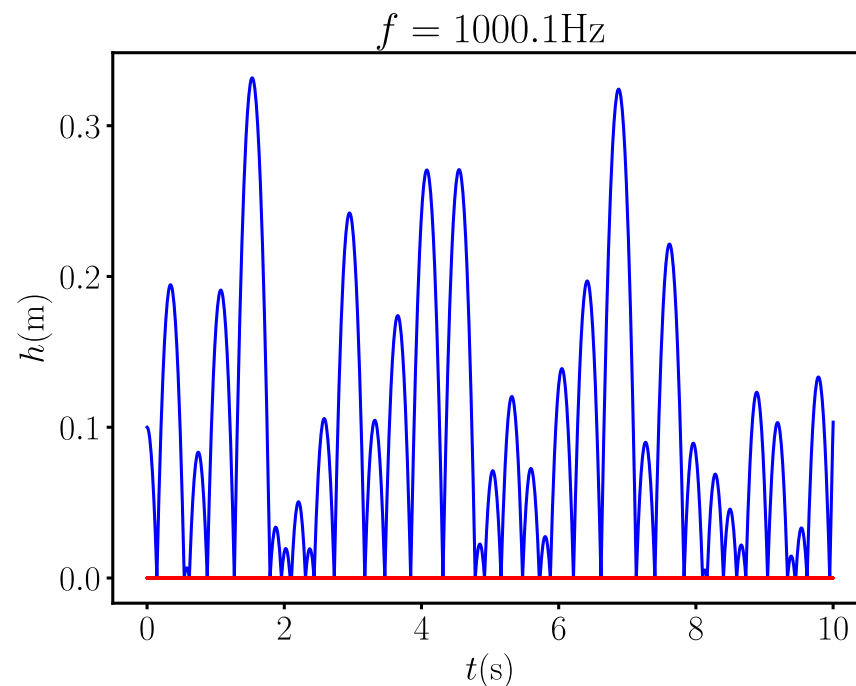
$$v_{n+1} = -\eta v_n + (1 + \eta)u_n$$

使用python和ROOT数值模拟小球的运动，以对运动进行更加深入的分析。

定义无量纲参量 $\Gamma = \frac{\omega^2 A}{\pi g}$ ，研究体系的运动随着该参量的变化。



$f = 1000.0\text{Hz}$



$f = 1000.1\text{Hz}$

如图，可以看到即使是相差极小的两个频率值，所造成的球的运动也完全不同，说明小球的运动具有初值敏感性。我们接下来将分析小球的运动是如何随着参量的变化走向混沌的。

稳定运动



首先分析稳定运动^{[3][4]}，在小球做稳定运动的时候，有小球的周期等于 m 倍的平台周期：

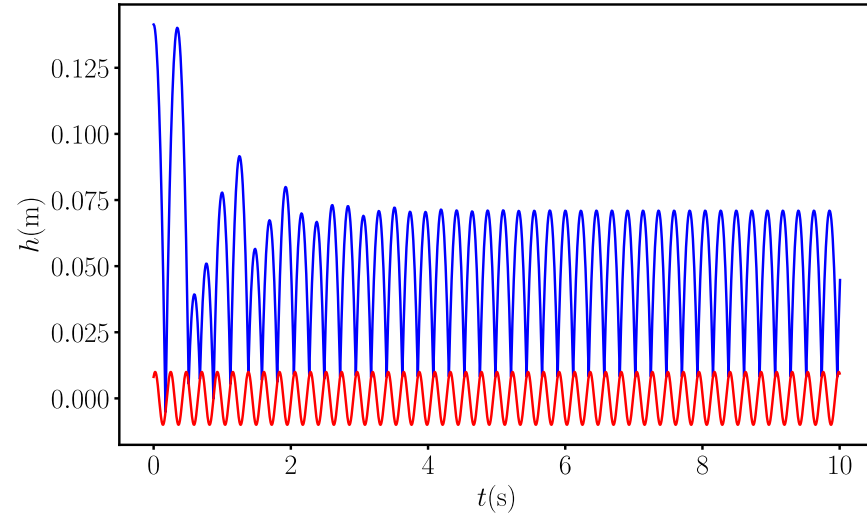
$$\tau = mT$$

所以小球每次碰后的速度满足：

$$v_n = \frac{\tau g}{2} = \frac{m\pi g}{\omega}$$

稳定点的相位满足：

$$\cos(\varphi) = \frac{m\pi g(1 - \eta)}{A\omega^2(1 + \eta)}$$



经过计算^[2]，可以得到为了使该运动是稳定的条件为：

$$L < \Gamma < U$$

$$L = m \frac{1 - \eta}{1 + \eta}$$

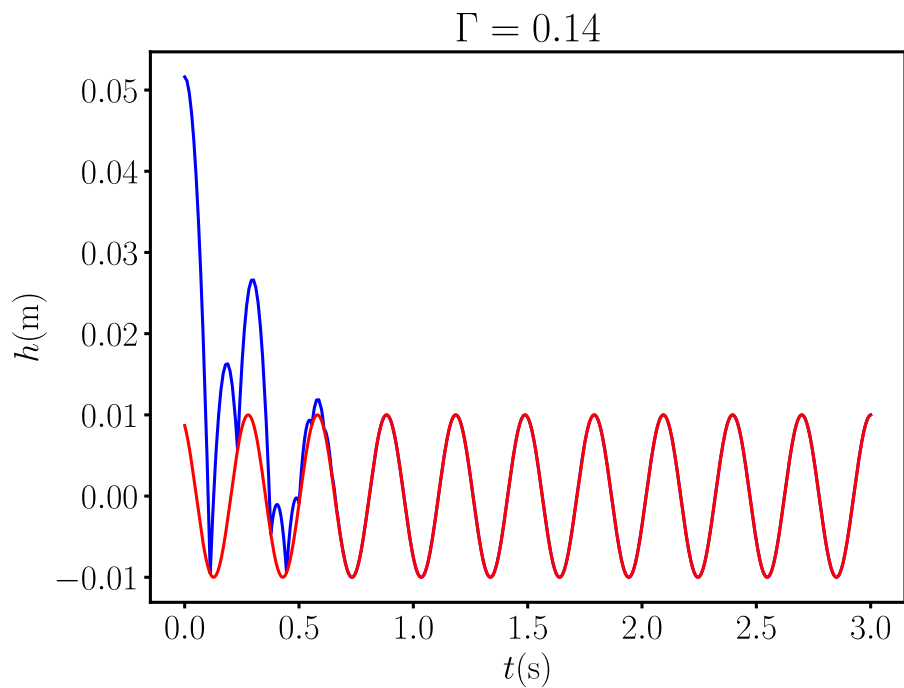
$$U = \sqrt{\left(m \frac{1 - \eta}{1 + \eta}\right)^2 + \left(\frac{2(1 + \eta^2)}{\pi(1 + \eta)^2}\right)^2}$$

[3] Cedia, Julian and Joel C. Miller. "Bouncing Balls on Oscillating Tables."

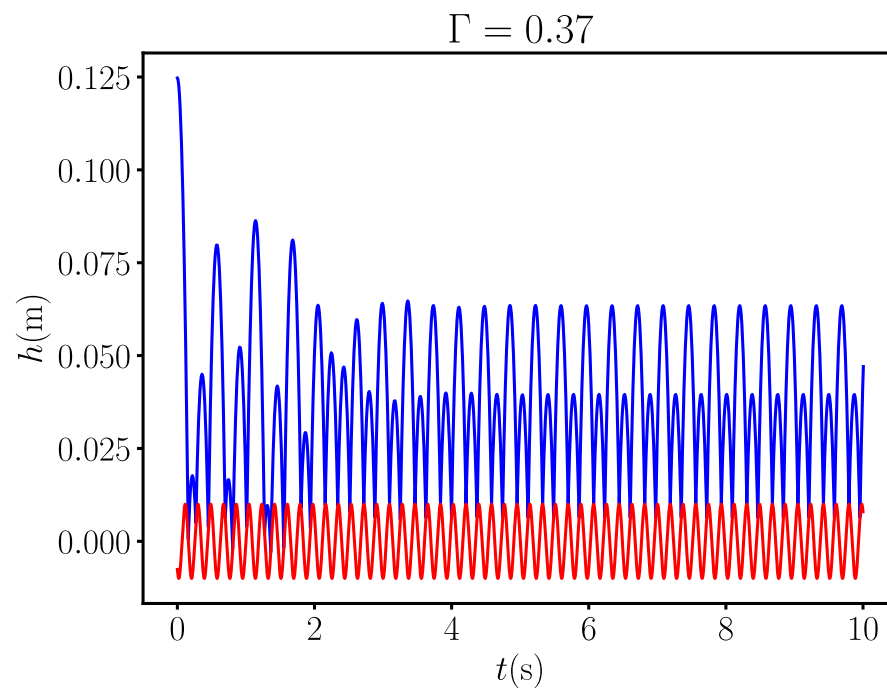
[4] Luck, Jean-Marc & Mehta, Anita. (1993). Bouncing ball with a finite restitution: Chattering, locking, and chaos. Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics. 48. 3988-3997. 10.1103/PhysRevE.48.3988.

稳定运动

取参量 $\eta = 0.75$, 对应 $L = 0.1429, U = 0.3548$



$\Gamma = 0.14 < L$
系统走向衰减, 小球完全
贴附在平台表面运动

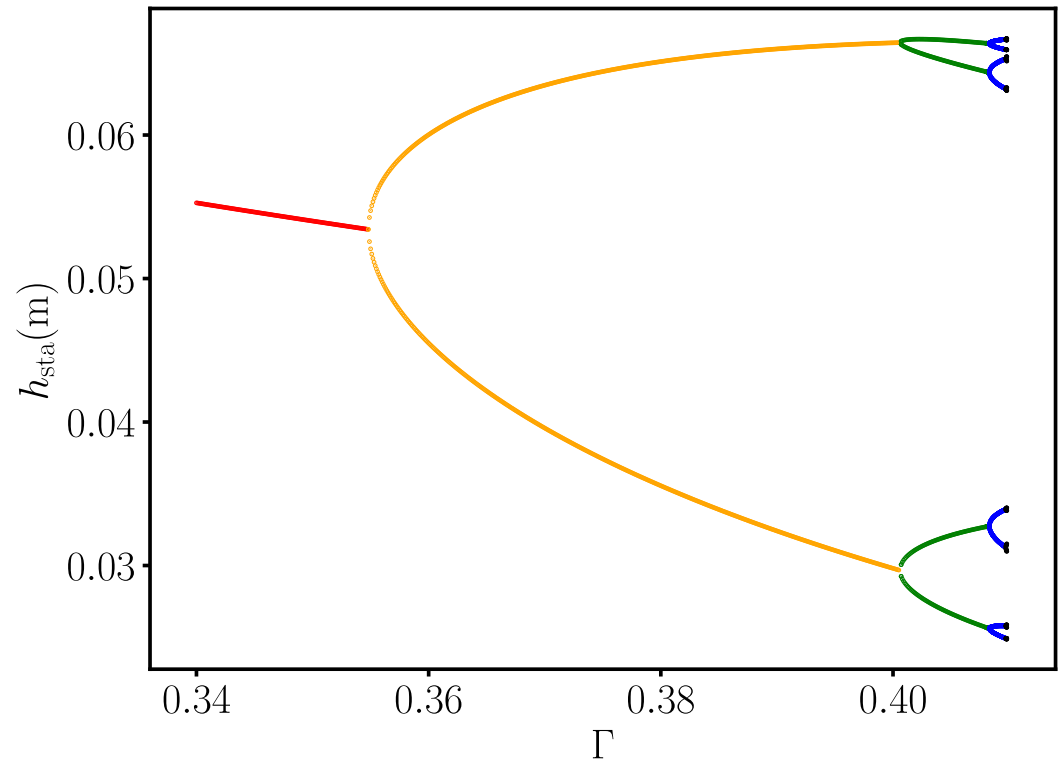


$\Gamma = 0.37 > U$
系统发生倍周期分岔, 出
现了两个吸引子

倍周期分岔

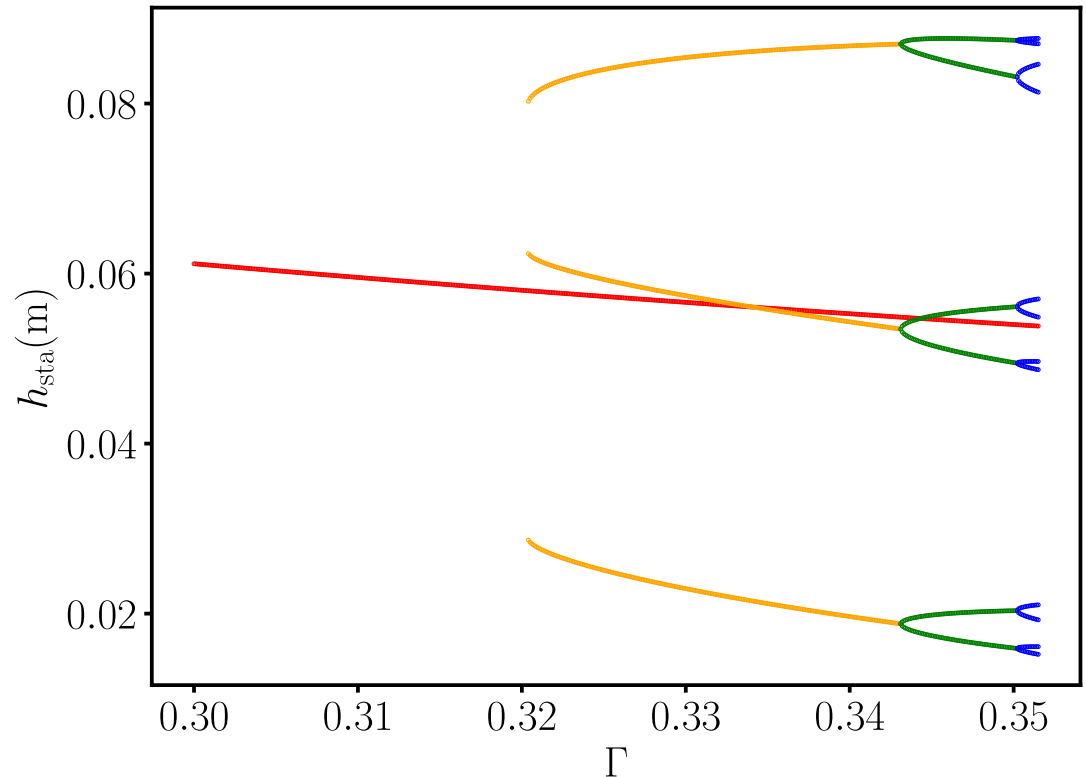


随着参量 Γ 的变化, 小球会不断地进行倍周期分岔, 直至达到完全的混沌, 可以做出倍周期分岔的图:

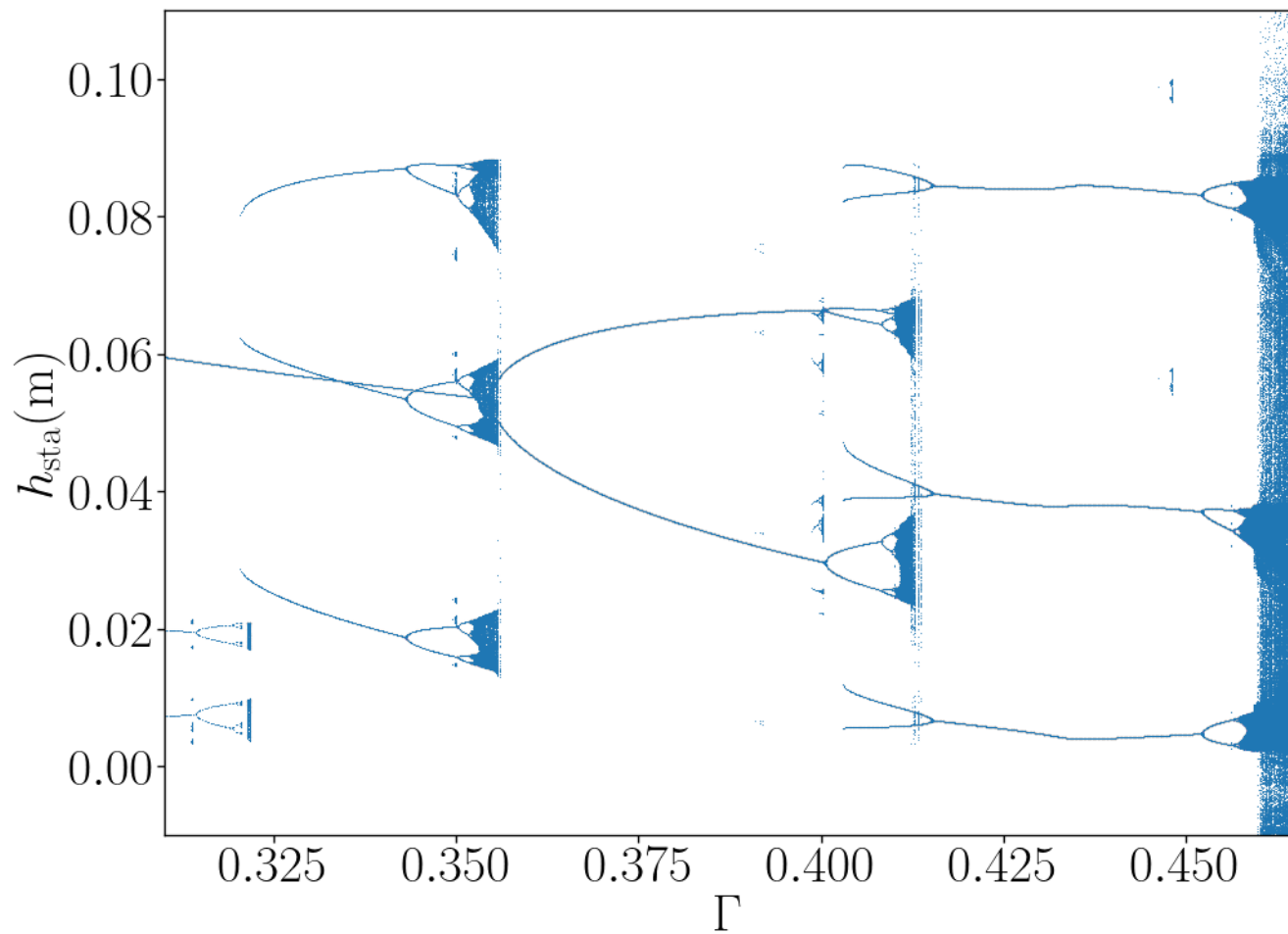


倍周期分岔

相比于Logistic映射，这个问题更为复杂，一个体现就是即使对应于同一个 Γ 值，也会存在着不同的运动模式，比如 $\Gamma = 0.33$ 时就至少存在一个吸引子和三个吸引子两种运动模式。将两种模式做画在同一张图上，可以看到在 $\Gamma = 0.35$ 时单吸引子轨道还未进行第一次分岔，而三吸引子轨道已经分岔多次。



倍周期分岔

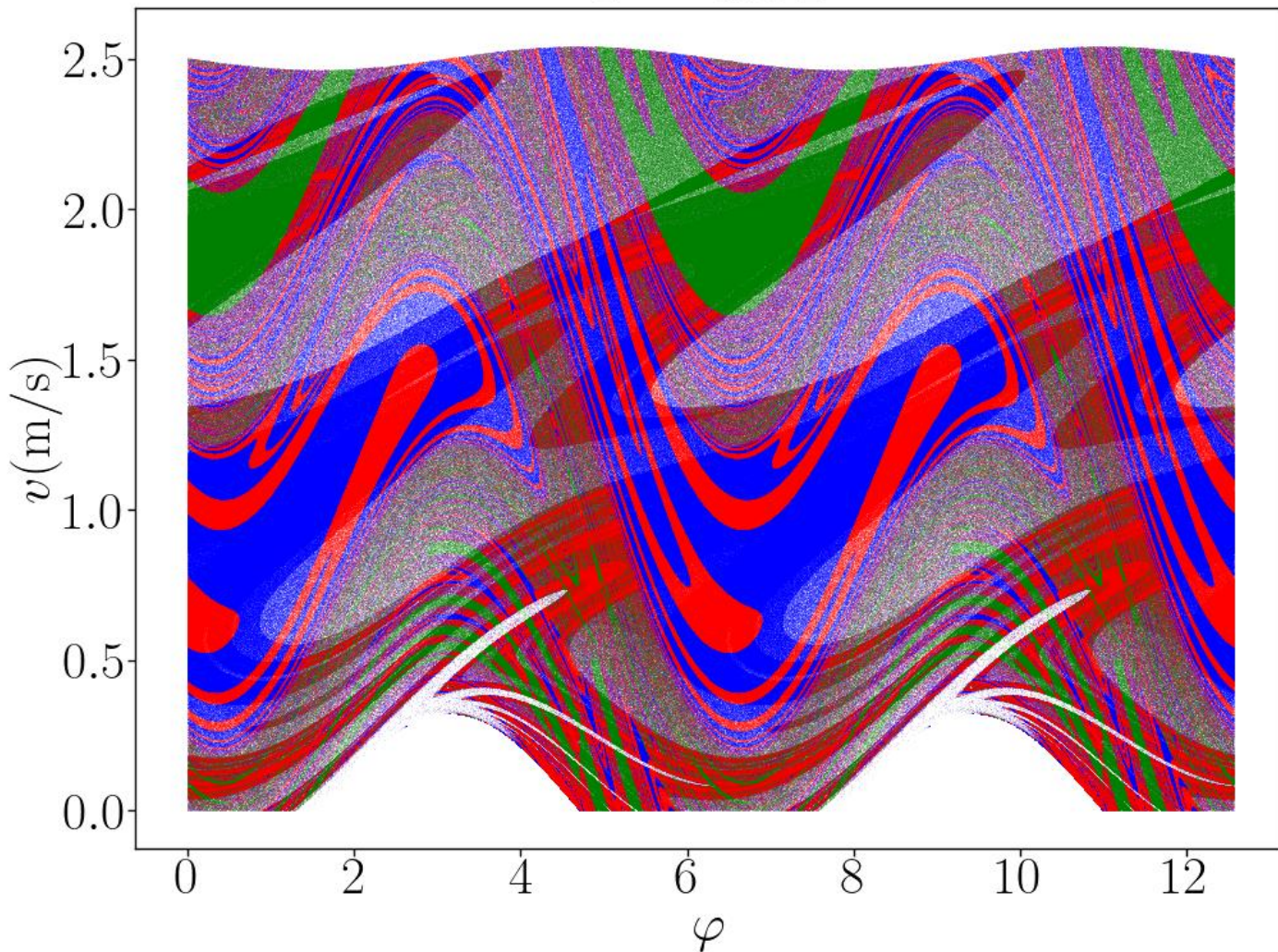


小球稳定后的最大高度与 Γ 的关系，同一个 Γ 可以对应多种模式。

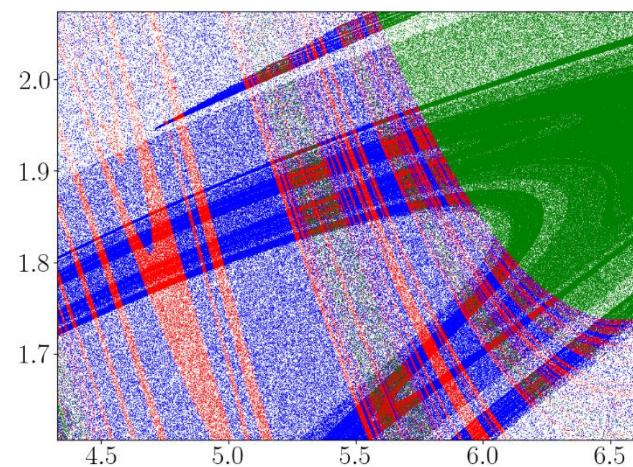
相图



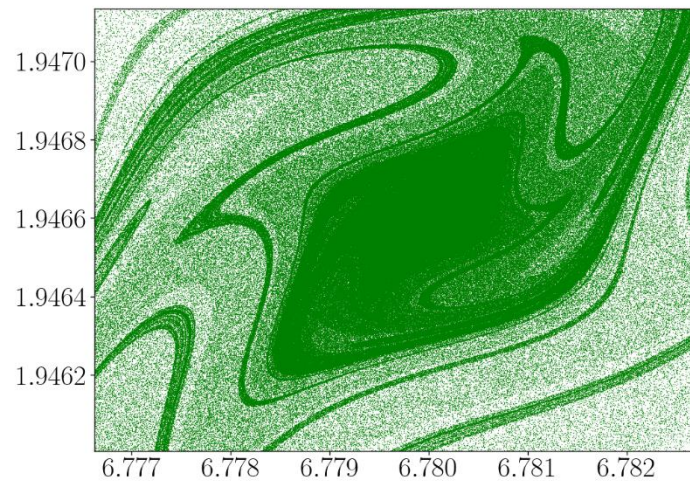
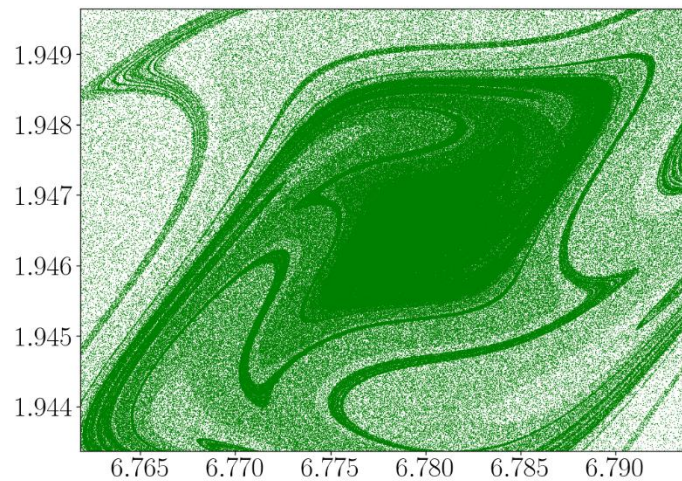
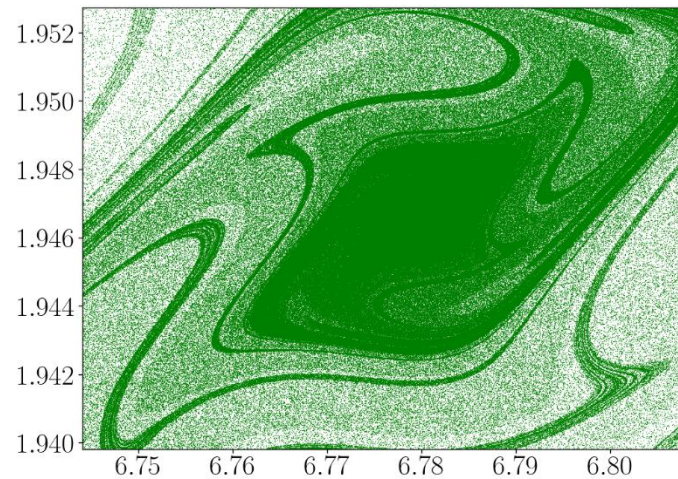
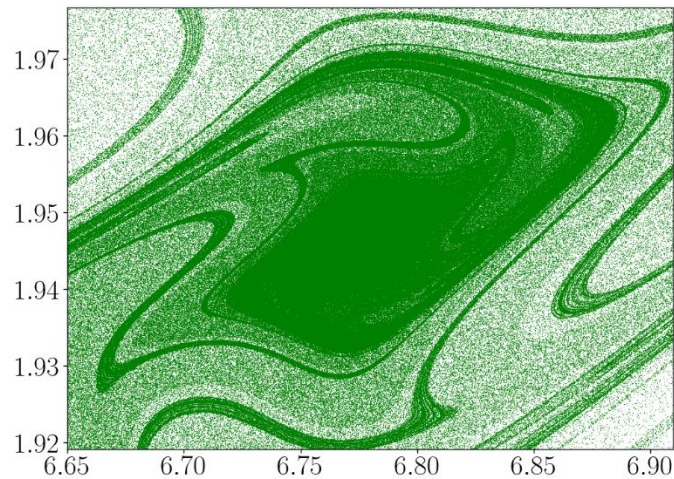
$$\Gamma = 0.34$$



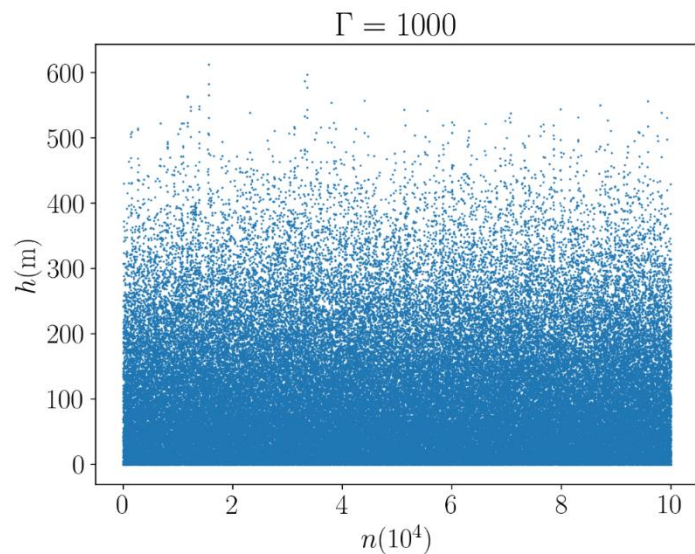
左图显示了稳定后的模式对于初始条件的依赖：
蓝色表示 $m = 1$ 的单吸引子轨道；
绿色表示 $m = 2$ 的单吸引子轨道；
红色表示三吸引子轨道。



相图



吸引子附近的细节，有很明显的自相似特征。



在 Γ 很大时，系统的行为趋于完全的混沌，在时间趋于无穷时小球的最高高度将会覆盖从0到最大值之间的每一个点，而不是像之前那样聚集在有限的吸引子处。

- 但是我们仍然可以利用数值模拟的手段对小球的高度分布进行一些探究。
- 在时间足够长时，我们可以认为小球每次与平台碰撞时平台的相位是随机的，这样我们可以假设一个稳定的状态分布，然后根据统计学中的理论求出该分布。

随机相位给出的平台的速度 u 满足如下分布:

$$g(u) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{u_0^2 - u^2}}$$

其中 $u_0 = \omega A$ 是其最大速度.

假设碰后速度的分布为 $h(v')$, 则碰前速度 v 同样满足分布 $h(v)$, 有

$$v' = \eta v + (1 + \eta)u$$

所以可以得到分布 $h(v)$ 满足的关系:

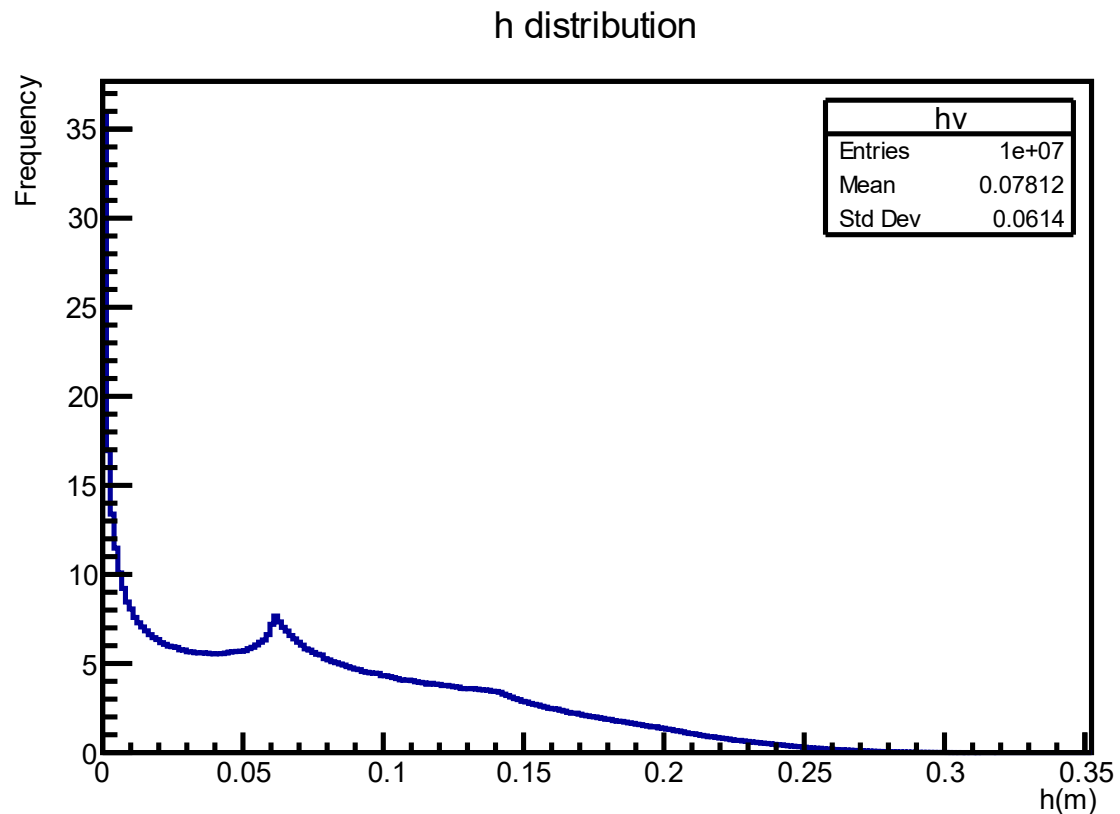
$$\begin{aligned} h(v') &= \int_{-\infty}^{\infty} h(v) g(v' - \eta v) dv \\ &= \int_{\frac{-v' - (1+\eta)u_0}{\eta}}^{\frac{-v' + (1+\eta)u_0}{\eta}} h(v) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(1 + \eta)^2 u_0^2 - (v' - \eta v)^2}} dv \end{aligned}$$

这是个类似于卷积的式子, 但是与卷积的区别在于有了一个系数 η , 这个分布的解析解因此无法求出, 但是可以通过数值模拟得到足够好的描述.

高度分布

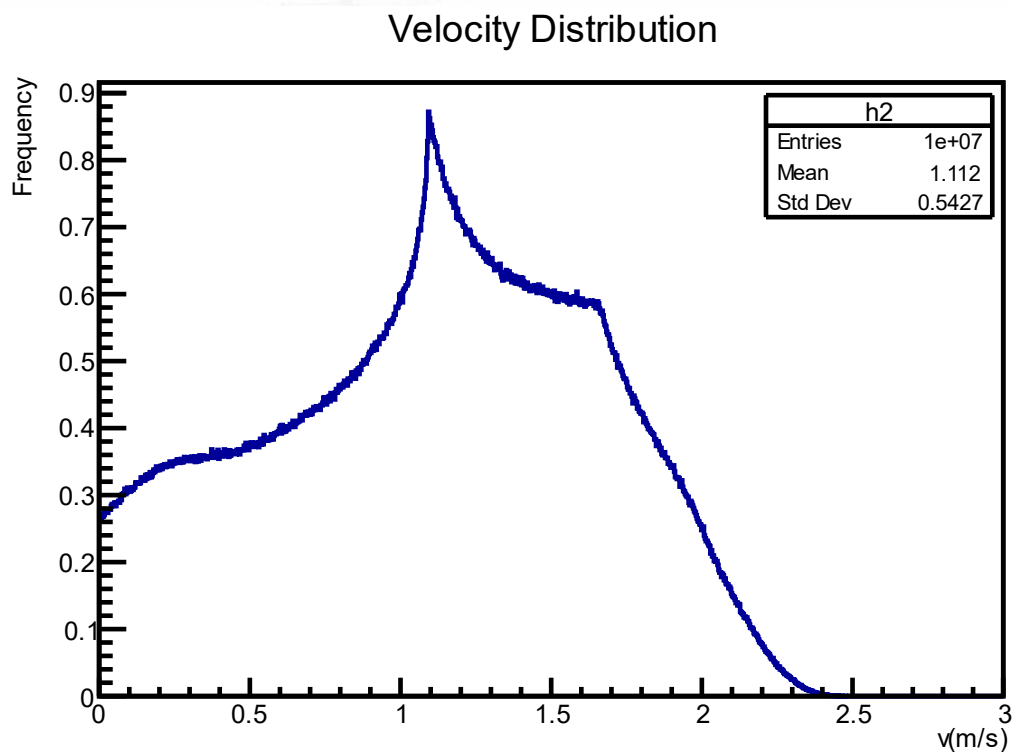


使用蒙特卡罗法模拟小球每次碰撞之后最大高度的分布 ($N = 10^7$)，得到的结果如右图所示。



每次碰撞后小球的最高高度分布图

速度分布



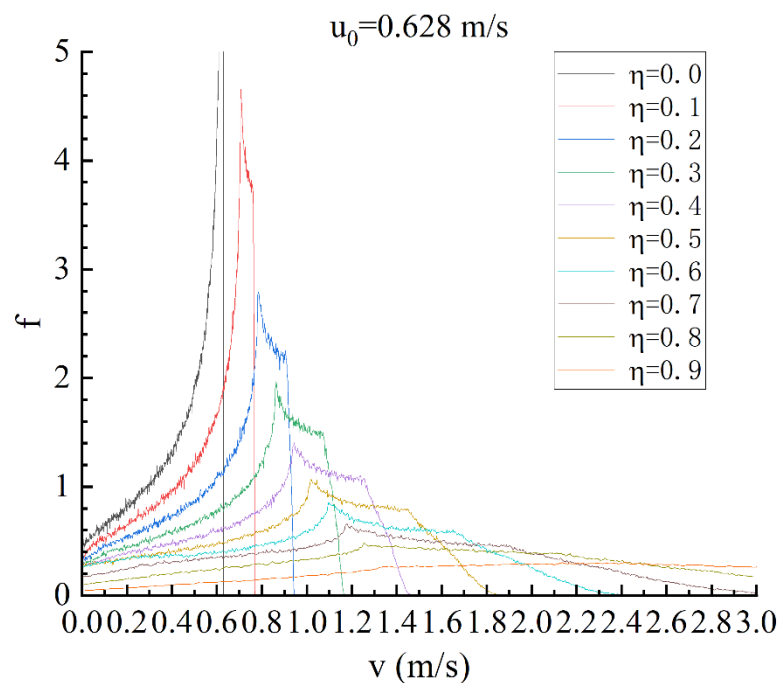
每次碰撞后小球的速度分布图

碰撞后的速度分布相比高度分布是一个更好的描述分布的参量，因为二者的概率密度函数满足如下关系：

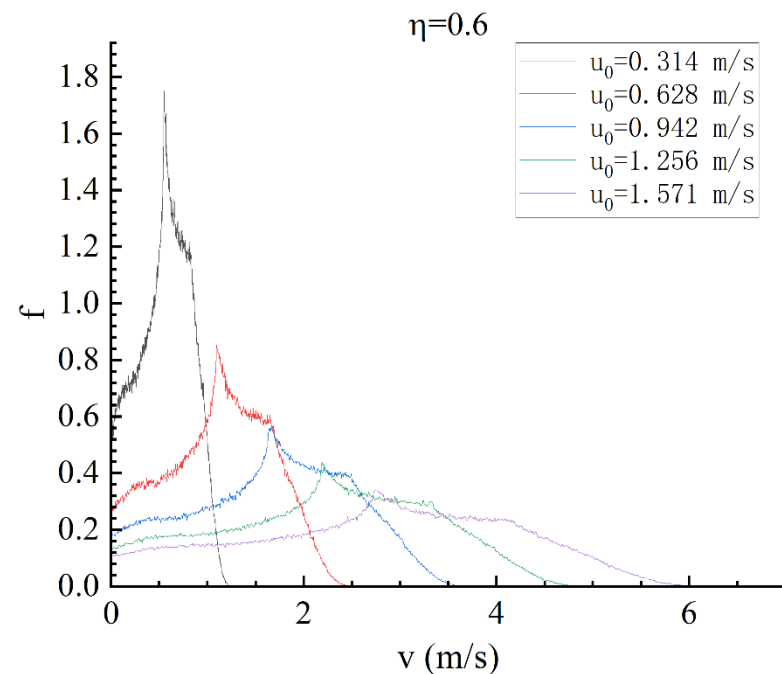
$$f(h) = g(v) \left| \frac{\partial v}{\partial h} \right| = \sqrt{\frac{g}{2h}} g(\sqrt{2gh})$$

所以在 h 的分布中在 $h = 0$ 附近存在奇异点，不便于分析，所以我们接下来分析速度的分布。

速度分布



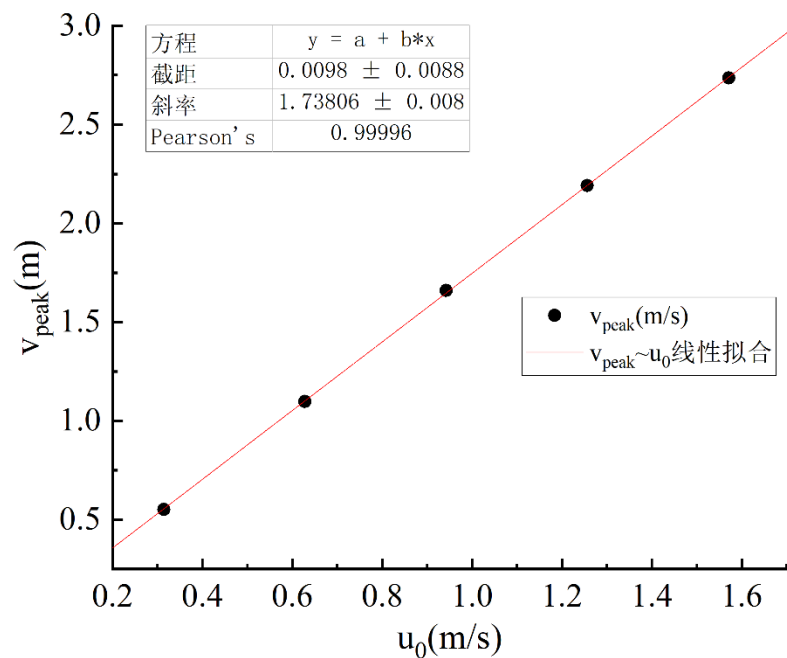
固定 u_0 , 改变 η



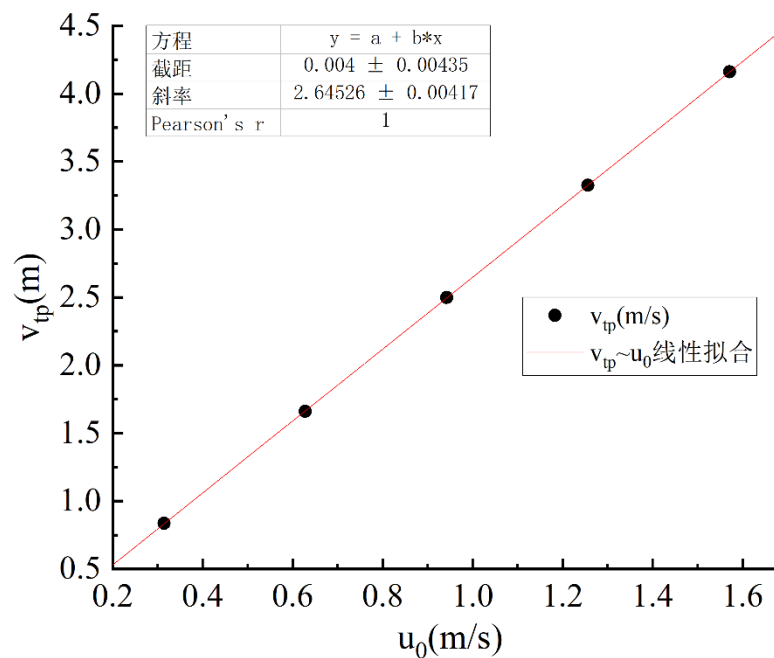
固定 η , 改变 u_0

可以明显地观察到一个尖峰(peak)和一个拐点(tp), 并且它们的位置随着 η 和 u_0 的增大而右移

速度分布



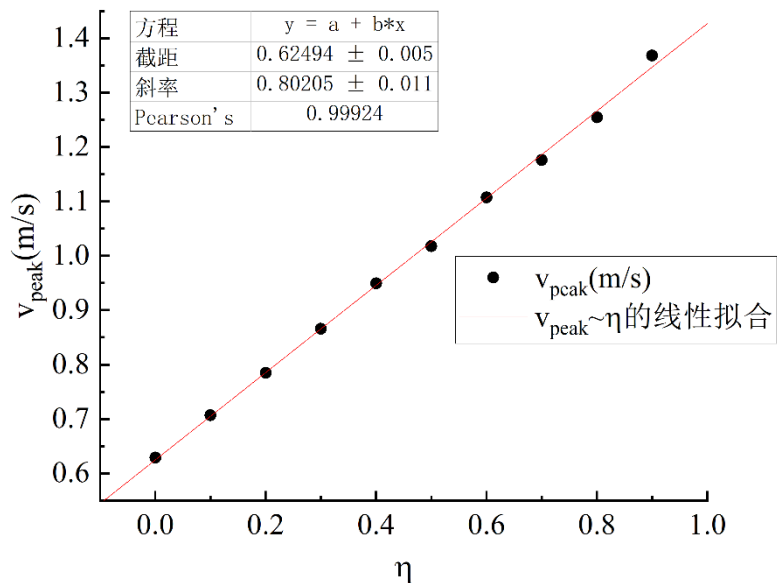
$v_{peak} - u_0$ 图线



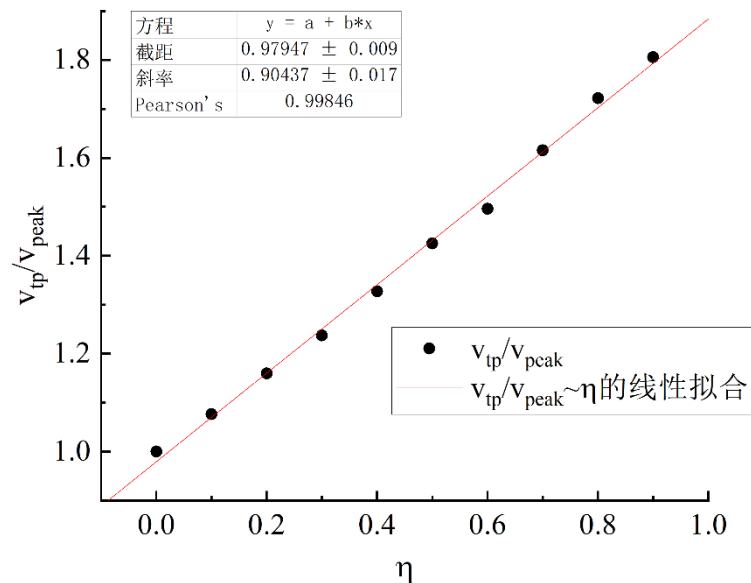
$v_{tp} - u_0$ 图线

可以看到无论是 v_{peak} 还是 v_{tp} 都和 u_0 呈良好的线性关系

速度分布



$v_{peak} - \eta$ 图线



$\frac{v_{tp}}{v_{peak}} - \eta$ 图线

v_{peak} 与 η 成线性关系，而 v_{tp} 与 η 不成线性关系，而是 $\frac{v_{tp}}{v_{peak}}$ 与 η 成线性关系，这可以从“卷积”公式中加以理解。

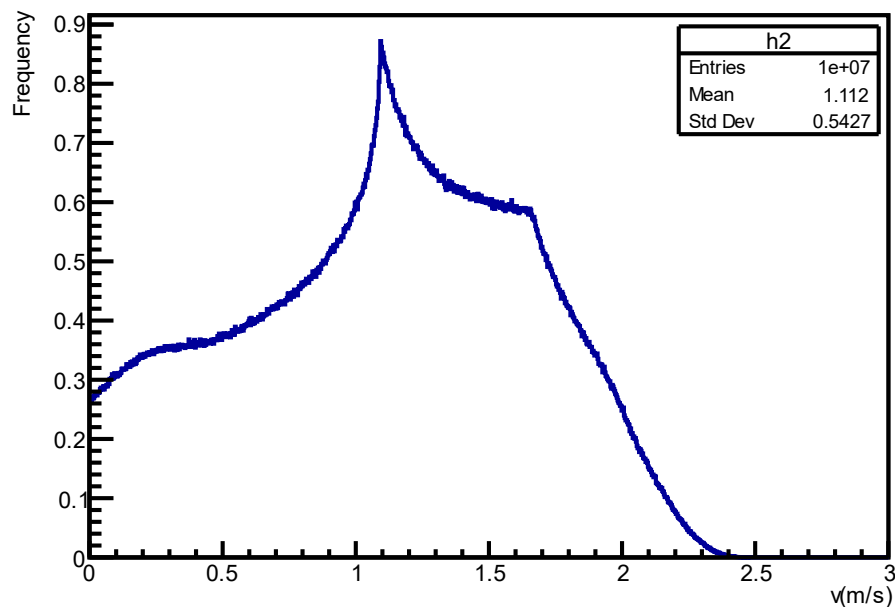
$$h(v') = \int_{\frac{-v'-(1+\eta)u_0}{\eta}}^{\frac{-v'+(1+\eta)u_0}{\eta}} h(v) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(1+\eta)^2 u_0^2 - (v' - \eta v)^2}} dv$$

速度分布

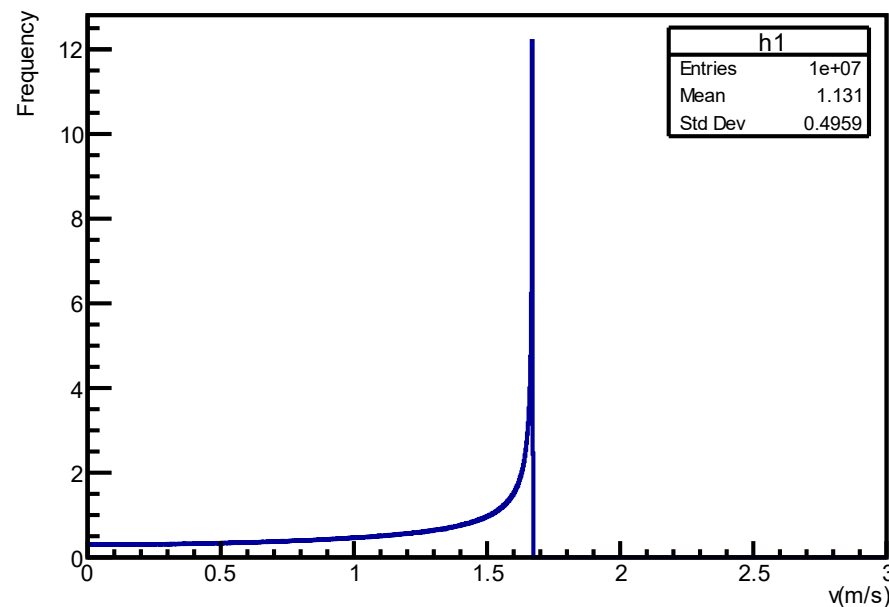


$$h(v') = \int_{\frac{-v'-(1+\eta)u_0}{\eta}}^{\frac{-v'+(1+\eta)u_0}{\eta}} h(v) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(1+\eta)^2 u_0^2 - (v' - \eta v)^2}} dv$$

Velocity Distribution



Hist1



在该参数下, $v_{peak} = 1.107\text{m/s}$, $v_{tp} = 1.656\text{m/s}$

拐点是由尖峰经过“卷积”得到的!



C
PART 05
U

结论展望

在该实验中，我们首先探究了铁氧体棒的横向纵向的振动特性，分析并仿真了其在交流磁场中的振动情况。

对于这个实验的重点——小球的弹跳，我们采用了稳定-倍周期分岔-混沌的路径对这一问题进行逐步的深入研究，并得到了一系列有趣的特性。

该实验中存在一个矛盾点：如果想要 Γ 满足倍周期分岔的条件，则会导致 u_0 太小，小球无法跳起；如果想要小球跳起，则会导致 Γ 过大，已经进入完全混沌的区间。所以在铁氧体棒-小球体系中很难观察到倍周期分岔的过程，但我们的分析具有一定的普遍意义。

- [1] Silva, João & Nascimento, Lucas & dos Santos, Simone. (2015). Free vibration analysis of Euler-Bernoulli beams under non-classical boundary conditions. 10.20906/CPS/CON-2016-1053.
- [2] R. D. James & Manfred Wuttig (1998) Magnetostriction of martensite, Philosophical Magazine A, 77:5, 1273-1299, DOI: [10.1080/01418619808214252](https://doi.org/10.1080/01418619808214252)
- [3] Ceddia, Julian and Joel C. Miller. “Bouncing Balls on Oscillating Tables.” .
- [4] Luck, Jean-Marc & Mehta, Anita. (1993). Bouncing ball with a finite restitution: Chattering, locking, and chaos. Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics. 48. 3988-3997. 10.1103/PhysRevE.48.3988.



北京大學
PEKING UNIVERSITY

2023

感谢您的观看!

报告人：王艺霖





附录-横向振动

为了得到铁氧体棒的杨氏模量，首先分析细棒的横向自由振动，其满足如下的Euler-Bernoulli方程^[1]:

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

这个方程可以利用分离变量法求解，得到方程的通解为：

$$v(x, t) = V(x)T(t)$$

$$T(t) = D \cos(\omega t - \phi)$$

$$V(x) = C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x) + C_3 \sinh(\beta x) + C_4 \cosh(\beta x)$$

$$\text{其中 } \beta = \sqrt{\frac{\omega}{c}}, \quad c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

[1] Silva, João & Nascimento, Lucas & dos Santos, Simone. (2015). Free vibration analysis of Euler-Bernoulli beams under non-classical boundary conditions. 10.20906/CPS/CON-2016-1053.



附录-横向振动

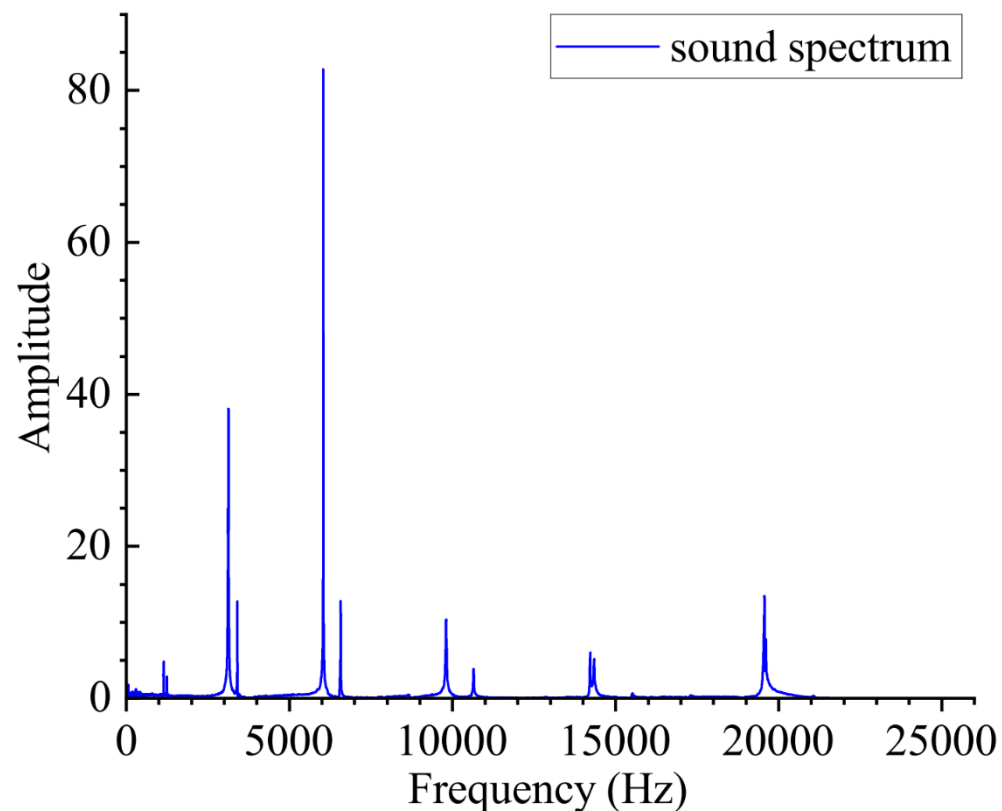
棒的两端自由，所以剪切力和弯矩都是零，在 $x = 0$ 和 $x = L$ 处有

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^3} = 0$$

得到方程在满足 $\cosh(\beta_n L) \cos(\beta_n L) = 1$ 的时候才有非零解.数值求解这个方程，可以得到 $\beta_n L$ 的大小：

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1 L}{\pi} &= 1.50562 & \frac{\beta_2 L}{\pi} &= 2.49975 \\ \frac{\beta_3 L}{\pi} &= 3.50001 & \frac{\beta_4 L}{\pi} &= 4.50000 \end{aligned}$$

由此也可以计算出相应的 $\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$



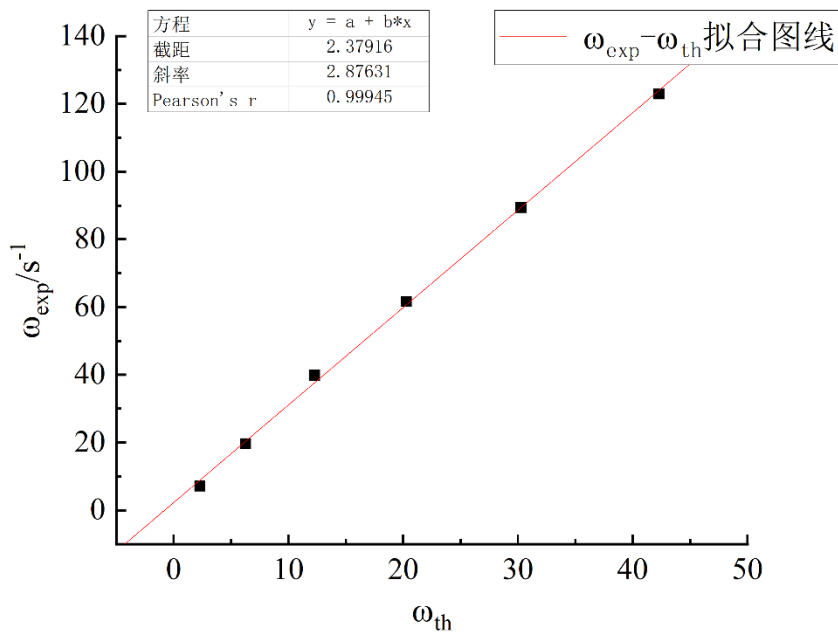
为了测量铁氧体棒材料的杨氏模量，采用敲击法测量铁氧体棒的横向振动的固有频率，将一根铁氧体棒吊起，用另一根同一规格的棒敲击，录制音频并对其进行傅里叶变换，得到声音的频谱如图（双峰是由于两根铁氧体棒的微小差异造成其频率不完全相同）

附录-频谱测定

读取频谱峰值位置

n	1	2	3	4	5	6
$\omega_{th} / \left(\frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \right)$	2.2669	6.2488	12.2501	20.2500	30.2500	42.2500
$\omega_{exp} / 10^3 \text{ s}^{-1}$	7.2156	19.678	39.948	61.611	89.379	122.95

表1: 各个固有频率的理论值 ω_{th} 和实验值 ω_{exp} 的比较



对 ω_{th} 和 ω_{exp} 进行线性拟合

$$\omega_{exp} = a + b\omega_{th},$$

$$b = 2.876 \times 10^3 \text{ Hz}$$

得到相关系数 $r = 0.99945$, 说明理论和实验符合情况良好.

可以利用斜率计算出铁氧体棒的杨氏模量为 $E = 7.40 \times 10^{10} \text{ Pa}$



磁致伸缩理论基础

磁致伸缩的理论基础:

- 维拉里效应 (形变对磁场的逆作用) :

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{H} + \frac{3\lambda_S}{\mu_0 M_S^2} S_{ed} \mathbf{M},$$

- 郎之万顺磁性理论:

$$L(|\mathbf{H}_{\text{eff}}|) = \coth\left(\frac{3\chi_m |\mathbf{H}_{\text{eff}}|}{M_S}\right) - \frac{M_S}{3\chi_m |\mathbf{H}_{\text{eff}}|}.$$

- 其中: \mathbf{H} : 磁场; \mathbf{H}_{eff} : 等效磁场; λ_S : 饱和磁致伸缩系数; M_S : 饱和磁化强度; S_{ed} : 弹性应力偏张量; χ_m : 初始磁化率。
- 由此得到铁磁质磁化规律:

$$\mathbf{M} = M_S L(|\mathbf{H}_{\text{eff}}|) \frac{\mathbf{H}_{\text{eff}}}{|\mathbf{H}_{\text{eff}}|}.$$

- 应变与应力满足:

$$\varepsilon_{me} = \frac{3\lambda_S}{2M_S^2} \text{dev}(\mathbf{M}\mathbf{M}), \quad \mathbf{S} = \mathbf{C}_H [\varepsilon_{el} - \varepsilon_{me}(\mathbf{M})],$$

- 其中 $\mathbf{M}\mathbf{M}$ 为矢量张量积, \mathbf{C}_H 为刚度矩阵, ε_{el} 为初始应变。