

弦上驻波实验

一、实验数据与处理

1. 测量弦线线密度

使用实验室提供的样品线进行测量，长度的测量结果为：

$$x_1 = 60.05\text{mm}, \quad x_2 = 834.52\text{mm}, \quad l = x_2 - x_1 = 774.47\text{mm}$$

质量的测量结果为 $m = 4.54\text{g}$ 。所以得到弦线的线密度为：

$$\rho = \frac{m}{l} = 5.86 \times 10^{-3}\text{kg/m}^3$$

2. (1) 共振频率与驻波波腹个数 n 的关系：

实验条件：弦线直径 $d = 1.085\text{mm}$ ，弦线有效长度 $L = 60.0\text{mm}$ ，砝码质量 $M = 1000.36\text{g}$ ，悬挂位置 $F = 3Mg$ ，使用的是 PASCO 型弦音计。

驻波波腹个数 n	1	2	3	4	5	6
驱动频率 f_{driver}/Hz	31.36	62.96	94.44	126.41	158.36	190.04
共振频率 f_{res}/Hz	62.72	125.92	188.88	252.82	316.72	380.08

表 1: 共振频率 f_{res} 与驻波波腹个数 n 的关系

对 $f_{res} - n$ 进行最小二乘法拟合 $f_{res} = a + bn$ (如图 1)，有

$$a = 63.52\text{Hz}, \quad r = 0.999996$$

可以据此计算弦线上横波的传播速度：

$$v = f\lambda = a \cdot 2L = 76.22\text{m/s}$$

一开始驱动频率与共振频率相差较大时，弦线的振幅很小，波形也不稳定。随着驱动频率逐渐接近共振频率时，弦线的振幅逐渐增大，波形也逐渐趋近于稳定的正弦波形。当看到波形为正弦、振幅达到极大值且保持稳定时，即发生了共振。

2. 研究基频与弦线张力的关系：

(1) 理论：通过理论公式可以知道，波速 $v = \sqrt{T/\rho} = f\lambda$ ，所以得到基频与张力的关系为：

$$f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

(2) 实验：

分别将砝码悬挂在张力为 $k(k = 1 \sim 5)$ 倍重力的位置，并调节杠杆水平，测量弦线的基频，得到的结果如下：

将 $f_0 - \sqrt{k}$ 进行最小二乘法拟合 $f_0 = a + b\sqrt{k}$ ，得到相关系数为 $r = 0.99996$ ，由此可见基频 f_0 与张力 T 有良好的线性关系，这与理论预期的结果一致。

二、分析与讨论

1. 本实验的主要误差来源及对结果造成的相对不确定度大小的估计如下：

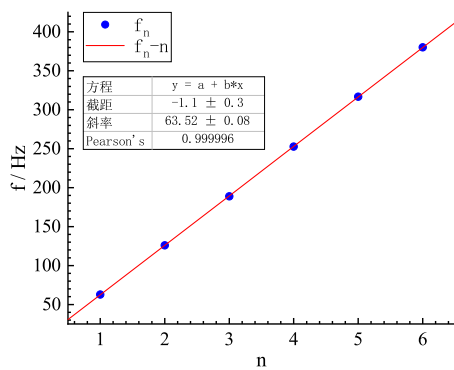


图 1: $f_{res} - n$ 关系图

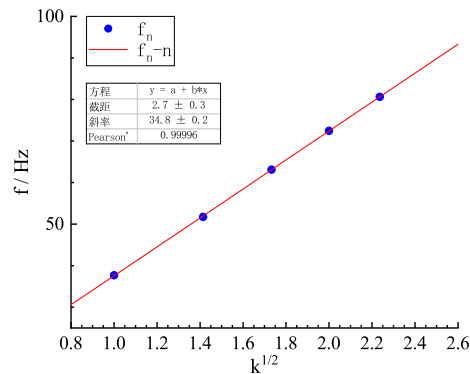


图 2: $f_0 - \sqrt{k}$ 关系图

张力 k/Mg	1	2	3	4	5
共振频率 f_{res}/Hz	37.70	51.74	63.10	72.46	80.64

表 2: 基频 f_0 与张力 kMg 的关系

- 有效长度测量误差, 随机误差, 影响约为 $\frac{0.1}{60} \approx 2 \times 10^{-3}$
- 弦线线密度的测量误差, 随机误差, 影响约为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{0.01}{4.54} \approx 1 \times 10^{-3}$
- 耗散, 系统误差, 由于耗散的存在, 会使得共振频率相较于无耗散的情况小一些, 估计这一项的影响约为 $10^{-4} \sim 10^{-3}$ 量级
- 弦线长度测量误差, 由于弦线无法完全拉直, 造成了系统误差, 弯折角最大估计为 5 度, 则因此造成的相对误差为 $(\frac{1}{\cos 5^\circ} - 1) \sim 4 \times 10^{-4}$
- 砝码质量测量误差, 随机误差, 影响约为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{0.01g}{1000.36g} \sim 5 \times 10^{-6}$

2.

(a) 弦线在振动过程中受的外力为 $F = (M \cdot \nabla)B$, 其中 M 是弦线的磁偶极矩, B 是磁场。

对于 XY-1 型弦音计, 它的铁芯是永磁体, 所以磁感应强度中直流占主导, 交流相比直流较小。M 是 B 的函数, B 以 T 为周期, 所以 M 也以 T 为周期。所以外力 F 同样以 T 为周期。

而对于 PASC0 型弦音计, 它的铁芯是软磁体, 所以磁场中交流占主导, 且 $B \propto I = I_0 \cos(\omega t)$ 。M 是 B 的函数, 并且由于对称性, $M(B) = -M(-B)$ 。因此有 $F(t) \propto M(B) \cos(\omega t)$, $F(t + T/2) \propto M(-B) \cos(\omega(t + T/2))$, 即有 $F(t + T/2) = F(t)$, 所以 PASC0 型弦音计对弦线的驱动力的频率实际上是驱动线圈的电流频率的 2 倍, 所以探测线圈频率是驱动线圈频率的 2 倍。

(d) 在实验过程中我发现, 如果将驱动频率从比共振频率稍低的位置缓慢向上调节越过共振点, 就会出现一种特定的波形 (如图 3), 且振幅持续增大, 所有的倍频都被激发 (如图 4), 直至一个最大值之后开始震荡衰减; 而如果反过来, 从比共振频率稍高的位置向下

调节，则不会出现此现象。这个现象的重复性较好，所以本来我打算对这个问题进行分析。但是在我进行了一定的理论分析和 matlab 数值模拟后，我发现振幅先增大后震荡衰减的现象是比较容易解释的，这无非是一个带有阻尼的拍的现象，用模拟也可以得到类似效果的图线（如图 5）。但是我很难解释从低到高和从高到低这两种情况明显的不对称行为，也无法解释图 3 里这个波形，这可能是由于实验中还有其余的因素我没有考虑到。由于缺乏进一步的实验细节，以及临近期中我的精力有限，这个问题只好暂且搁置了。

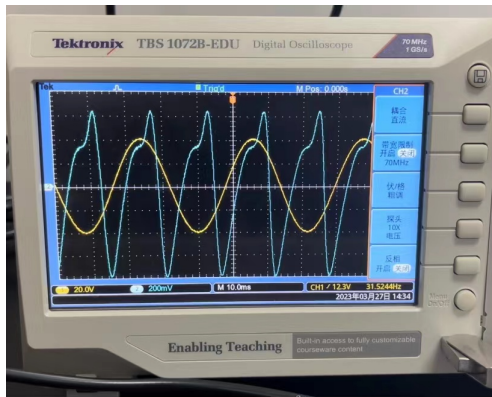


图 3: 波形

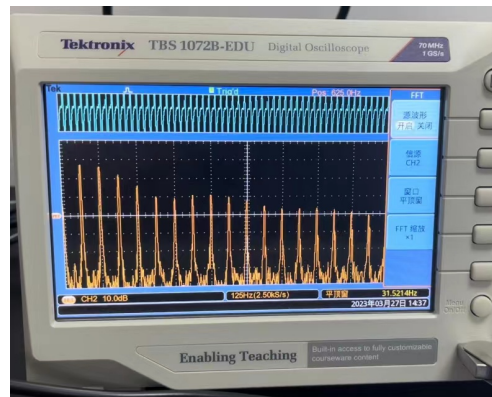


图 4: FFT

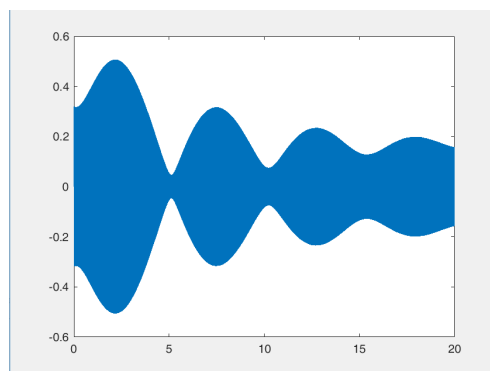


图 5: 从稍低于共振频率的位置缓慢增加频率，振幅随时间的变化

三、收获与感想

在做这个实验之前，我本来以为这个实验会非常简单，但是真正做的时候才发现，看似简单的实验里，也有不少可以发掘的地方。比如弦线有可能被激发出驱动频率的 $n(n = 1, 2, 3, 4, \dots)$ 倍频，以及驱动频率在共振频率附近时弦线的奇怪的行为。在分析这些现象的过程中，我加深了对一些问题的理解。